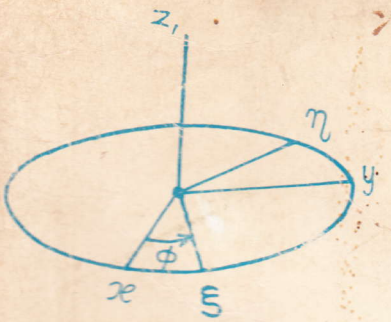
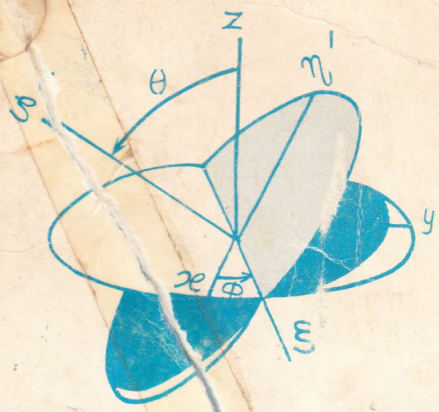
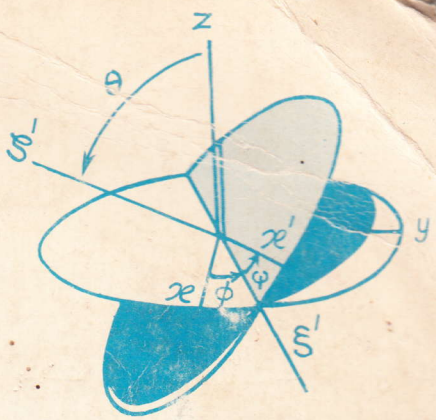




mekanika klasik

TAKAAN
TIMUR

Dr. Peter Soedojo, B.Sc.
Dr. . Harsojo

Penerbit : LIBERTY, YOGYAKARTA.

MILIK
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 64.387/PD/P/1994
Tanggal : 29/3 1994

MEKANIKA KLASIK

oleh :
Dr. Peter Soedojo, B.Sc.
Drs. Harsojo
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta.

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, 1985

©1985, Liberty Yogyakarta.
Dilarang mereproduksi isi buku ini baik sebagian maupun seluruhnya dalam bentuk dan atau alasan apapun juga, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

Penerbit :
LIBERTY YOGYAKARTA
Jayengprawiran 21, 23,
Yogyakarta.

Distributor :

- *Toko Buku BINA USAHA*
  Jalan Colombo 2-A, Telp. (0274) 86803,
  Yogyakarta.

  Toko Buku DOMINAN
  Jalan Jagalan 4, Telp. (0274) 88904
  Yogyakarta

  Toko Buku MULIA
  Jalan Gandasuli No. 5, Telp. (021) 354553
  Jakarta Pusat

  Toko Buku BINA USAHA
  Jalan Kramat Raya 18 (Senen)
  Telp. (021) 341117, Jakarta Pusat

  H. FRANKIM
  d/a Wisma Liberty,
  Jl. Pelepah Hijau 3 TL 2 No. 27
  Kelapa Gading Permai 2,
  Jakarta Utara.

KATA PENGANTAR

Sesuai dengan judulnya, buku ini memuat dasar-dasar pemikiran dalam mekanika klasik yang lebih dititik-beratkan pada segi analitik serta konsepsional, bukannya pada segi ketrampilan teknis pemecahan soal.

Mekanika klasik tidak hanya mencerminkan keterbatasan mekanika titik materinya Newton dalam memecahkan masalah sistem mekanis yang rumit, tetapi juga memberikan dasar yang fundamental dalam pengembangan fisika modern. Maka buku ini diharapkan memperluas cakrawala fisika maupun mekanika bagi para mahasiswa jurusan fisika maupun bagi para guru fisika di Sekolah Menengah Atas.

Akhirul kata, semoga buku sesederhana ini bermanfaat serta memberikan sumbangan yang berarti kepada khasanah pengajaran ilmu pengetahuan di Indonesia.

Segala kekurangan, kekhilafan, dan kelemahan buku ini, kiranya merupakan tantangan bagi para penulis lainnya di kemudian hari untuk menulis buku semacam yang lebih memadai dan lebih sempurna.

Penulis,

DAFTAR ISI

	Halaman
PENDAHULUAN	1
I. MEKANIKA TITIK MATERI	3
1. Hukum kekekalan tenaga mekanik	3
2. Gerakan di dalam sistem koordinat yang berputar	5
3. Gerakan di permukaan bumi	9
4. Bandul Foucolt	10
5. Gaya sentral	15
6. Hukum-hukum Keppler	20
II. MEKANIKA SISTEM MATERI	29
1. Titik berat	29
2. Hukum kekekalan impuls	30
3. Tenaga kinetik sistem materi	31
4. Impuls putar sistem materi	32
5. Momen gaya sistem materi	34
6. Tumbukan	36
7. Hamburan	40
8. Massa tereduksi	53
III. MEKANIKA SISTEM MEKANIS	55
1. Pendahuluan	55
2. Azas usaha semu	55
3. Azas D'Alembert	57
4. Persamaan Lagrange	59
5. Azas Hamilton	67
6. Penjabaran azas Hamilton dari azas D'Alembert	69
7. Penjabaran persamaan Lagrange dari azas Hamilton	70
8. Ruang fase dan persamaan Hamilton	71
9. Koordinat siklik dan cara Routh	76
10. Penjabaran persamaan Hamilton dari azas variasi Hamilton	78
11. Transformasi kanonik dan persamaan Hamilton-Jacobi	81
12. Azas action terkecil (Least action principle)	91
13. Variabel action dan variabel sudut	94
14. Invariansi integral Poincare	98
15. Kurung Lagrange (Lagrange bracket)	102
16. Kurung Poison (Poison bracket)	103
17. Rotasi kecil	104
18. Teorema Liouville	109
IV. MEKANIKA BENDA TEGAR	113
1. Pendahuluan	113
2. Transformasi orthogonal	113
3. Teorema Euler	118
4. Sudut-sudut Euler	121
5. Parameter Cayley-Klein	124
6. Rotasi kecil	130

Halaman

7. Impuls putar benda tegar dan tensor enersia 133
8. Elipsoida momental (Elipsoida inersial) 136
9. Tenaga kinetik rotasi 138
10. Persamaan gerak Euler 139
11. Persamaan Euler dengan sudut-sudut Euler 145
12. Gerakan pusingan 148

PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan alam yang paling primitif ialah mekanika, yakni ilmu yang membahas tentang gerakan. Demikianlah maka mekanika menjadi dasar ilmu pengetahuan alam umumnya dan ilmu fisika khususnya.
Pada hakekatnya ilmu mekanika boleh dikatakan dimulai sejak Aristoteles (384 s.M. - 322 s.M.) memikirkan gerakan-gerakan dengan bumi dianggap tetap tidak bergerak. Akan tetapi perumusan mekanika baru dikemukakan lama kemudian oleh Isaac Newton (1642 - 1727) di mana ia mengemukakan konsep gaya dan massa dalam hubungannya dengan percepatan. Kecuali itu Newton juga merumuskan gaya gravitasi dari hukum-hukum yang dikemukakan oleh Johannes Keppler (1571 - 1630); Keppler mengemukakan hukum-hukumnya tentang gerakan planet-planet berdasarkan data-data pengamatan Tycho Brahe (1546-1601) gurunya.
Sampai sejauh itu Newton hanya merumuskan mekanika untuk titik materi. Untuk sistem mekanika umumnya, yang lebih rumit, mekanikanya Newton kurang atau bahkan tidak berdaya sama sekali. Maka muncullah kemudian pengembangan mekanika lebih lanjut dari karya tokoh-tokoh seperti Johan Bernoulli (1667 - 1748), Jean Le Ron D'Alembert (1717 - 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), William Rowan Hamilton (1805 - 1865) dan lain-lain; teori-teori mekanika umum yang dikembangkan oleh tokoh-tokoh tersebut dikenal sebagai mekanika klasik. Mekanika klasik ini memang terlalu berkepanjangan apabila diterapkan untuk memecahkan masaalah-masaalah mekanika yang sederhana. Akan tetapi di lain pihak, mekanika klasik ternyata kemudian menjadi dasar mekanika modern seperti mekanika statistik, mekanika gelombang, mekanika kwantum, teori medan dan lain sebagainya dalam fisika modern.
Dengan timbulnya teori relativitas yang dituntaskan oleh Albert Einstein (1879 - 1955), untuk titik materi yang bergerak dengan sangat cepat, massa nya dipandang tidak tetap dan timbullah mekanika relativistik.

Unsur-unsur mekanika ialah ruang, waktu dan materi. Kalau pembicaraannya hanya menyangkut jenis-jenis gerakan, maka hanya unsur-unsur ruang dan waktu saja yang terlibatkan; bagian mekanika yang membicarakan tentang jenis gerakan demikian disebut kinematika. Kalau pembahasannya yang menyangkut penyebab gerakan maka kecuali unsur ruang dan waktu unsur materi, yang dinyatakan oleh massanya juga terlibat; bagian mekanika yang membahas hal demikian disebut dinamika. Adapun statika ialah bagian mekanika yang membahas hal kesetimbangan.
Konsep kinematika yang berhubungan dengan ruang ialah tempat yang dapat dinyatakan dengan koordinat-koordinat di dalam suatu sistem koordinat yang dipilih, sedangkan yang berhubungan dengan ruang dan waktu ialah kecepatan dan percepatan.
Kecepatan didefinisikan sebagai jarak yang ditempuh per satuan waktu atau tepatnya diferensial koordinat terhadap waktu, sedangkan percepatan adalah penambahan kecepatan per satuan waktu atau tepatnya diferensial kecepatan terhadap waktu.
Untuk memudahkan analisa, tempat titik materi lazimnya dinyatakan dengan vektor koordinat r misalnya.

Vektor koordinat ini adalah vektor yang pangkalnya di pusat sistem koordinat dan ujungnya di tempat titik materi berada. Dengan demikian kecepatan didefinisikan sebagai $\underset{\sim}{v} = d\underset{\sim}{r}/dt$ dan percepatan didefisinisikan sebagai $\underset{\sim}{a} = d\underset{\sim}{v} / dt = d(d\underset{\sim}{r} / dt) / dt = d^2\underset{\sim}{r} / dt^2$.
Jelaslah bahwa dimensi kecepatan adalah dimensi panjang [l] misalnya dibagi dimensi waktu [t] misalnya, sehingga satuannya misalnya meter/detik dan dimensi percepatan adalah dimensi kecepatan [v] dibagi dimensi waktu [t] yakni [l] dibagi $[t]^2$ sehingga satuannya misalnya meter/detik^2.

Ukuran banyaknya gerakan ditinjau dari usaha yang diperlukan untuk menimbulkan atau mengubah gerakan adalah sebanding dengan ukuran kwantitatif materi yang bergerak. Maka dalam dinamika timbul konsep impuls atau momentum yang didefinisikan sebagai massa kali kecepatan. Jelaslah bahwa dimensi impuls adalah dimensi massa [m] misalnya kali dimensi kecepatan [v] yakni [m] [v] = [m] [l] / [t].
Adapun apa yang menyebabkan gerakan atau lebih umum yang mengubah banyaknya gerakan, disebut gaya. Gaya didefinisikan sebagai perubahan impuls per satuan waktu atau tepatnya diferensial impuls terhadap waktu yakni $d(m\,\underset{\sim}{v}) / dt$. Hal ini dikemukakan oleh Isaac Newton.

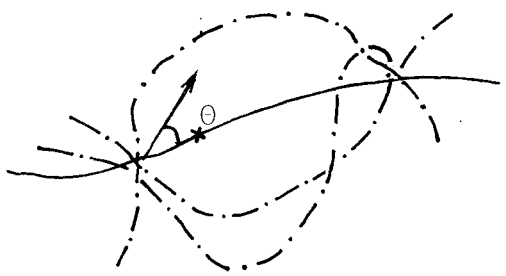
Dalam mekanika di samping besaran-besaran kecepatan, percepatan, impuls, dan gaya, dikenal pula besaran-besaran tenaga kinetik, tenaga potensial, usaha, dan daya. Namun bagaimanapun dimensi besaran-besaran tersebut selalu dapat dinyatakan sebagai fungsi dimensi ketiga unsur mekanika [l] [t] dan [m].
Dengan demikian setiap besaran mekanika selalu dapat dinyatakan sebagai fungsi 3 besaran mekanika lain yang dipilih.
Ilmu fisika boleh dikatakan pengembangan lebih lanjut dari pada mekanika di mana unsur-unsurnya kecuali unsur-unsur mekanika, ruang, waktu dan massa, juga misalnya suhu dalam ilmu panas, kuat penerangan dalam ilmu optik, keras bunyi dalam ilmu suara, dan arus listrik dalam elektromagnetika. Jadi kalau unsur-unsur mekanika tidak lebih dari 3 buah, maka unsur-unsur fisika tidak lebih dari 7 buah di mana di dalamnya termasuk ketiga unsur-unsur mekanika..

Dari uraian di bab pendahuluan ini, jelaslah bahwa mekanika klasik kecuali merupakan mekanika umum selengkapnya, juga mendasari pengertian pokok bagi mekanika modern khususnya dan ilmu fisika modern umumnya.

I. MEKANIKA TITIK MATERI

1. Hukum Kekelan Tenaga Mekanik

Kita tinjau suatu titik materi yang bergerak dari A ke B di dalam medan gaya seperti tertera di gambar I.1. di bawah ini.



Gambar I.1.
Usaha di dalam medan gaya konservatif.

Increment usaha sepanjang increment lintasan $\underset{\sim}{dr}$ yang tidak sejajar gaya $\underset{\sim}{F}$ di titik A, diberikan oleh

$$dU = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{dr} = F\, dr \cos\theta$$

sehingga usaha total yang dilakukan oleh titik materi dari A ke B adalah

$$U_{AB} = \int_A^B \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{dr} = \int_A^B \frac{d}{dt} (m\underset{\sim}{v}) . \underset{\sim}{dr}$$

Apabila v <<c, kecepatan cahaya, maka gerakannya non relativistik dan m dipandang tetap; dengan demikian integral itu menjadi

$$U_{AB} = m \int_A^B \frac{\underset{\sim}{dv}}{dt} . \underset{\sim}{dr} = m \int_A^B \frac{\underset{\sim}{dr}}{dt} . \underset{\sim}{dv} = m \int_A^B \underset{\sim}{v} . \underset{\sim}{dv}$$

$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

di mana v_A dan v_B masing-masing adalah kecepatan di titik-titik A dan B. Dengan mendefinisikan $\frac{1}{2} mv^2$ sebagai tenaga kinetik, maka usaha yang telah dilakukan itu sama dengan penambahan tenaga kinetik yang diperoleh yakni ΔK misalnya.

Jikalau medan gayanya adalah sedemikian hingga usaha yang dilakukan dalam gerakannya dari satu titik ke titik lain tidak tergantung pada

lintasannya melainkan hanya tergantung pada letak kedua titik itu, maka di setiap titik dapat dikaitkan suatu besaran skalar V misalnya yang sedemikian hingga usaha itu sama dengan perubahan harga V tersebut yakni $\Delta V = V_A - V_B$.
Titik materi yang telah melakukan usaha dapat dikatakan telah berkurang potensinya untuk melakukan usaha lebih lanjut; maka V lalu disebut tenaga potensial.
Jadi untuk medan gaya yang demikian berlaku hubungan

$$U = - \Delta V = \Delta K$$

yang berarti pula

$$V + K = \text{tetap}$$

atau conserved; medan gaya yang menyebabkan berlakunya hubungan di atas disebut medan gaya konservatif.
Jadi di dalam medan gaya yang konservatif, tenaga mekanik yaitu jumlah tenaga potensial dan tenaga kinetik, adalah tetap. Pernyataan ini dikenal sebagai hukum kekekalan tenaga mekanik.

Jelaslah bahwa di dalam medan gaya konservatif, usaha sepanjang lintasan tertutup yakni sepanjang lintasan dari suatu titik kembali ke titik itu lagi, adalah nol sebab misalnya titik itu ialah A maka sudah tentu $\Delta U = V_A - V_A = 0$.
Dalam elektromagnetika kita kenal rumus curl $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{j}$ yakni usaha oleh medan magnet H sekeliling lintasan tertutup sama dengan jumlah arus listrik i yang dicakup lintasan itu.
Medan gaya demikian sudah tentu tidak konservatif dan karena usaha sekeliling lintasan adalah tertentu, maka medan gaya demikian disebut medan gaya rotasional.

Selanjutnya dari hubungan-hubungan

$$dU = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{dr} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz$$

serta mengingat dU = - dV di atas, maka

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \; ; \; F_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \; ; \; F_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

atau secara singkat, menurutkan kalkulus vektor,

$$\underset{\sim}{F} = - \nabla V \text{ atau } \underset{\sim}{F} = - \text{grad } V \qquad (1)$$

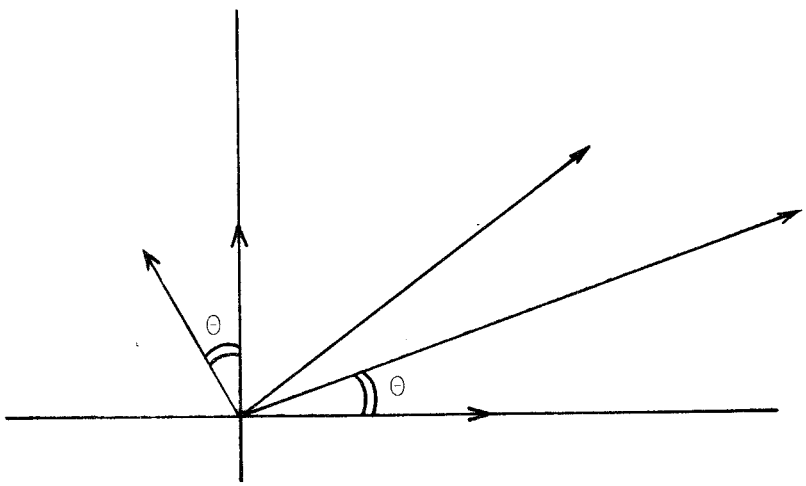
Jadi untuk medan gaya yang konservatif, gaya dapat dinyatakan sebagai gradian potensial.

Seandainya dalam gerakannya, titik materi mengalami gesekan, maka hukum kekekalan tenaga mekanik tidak lagi berlaku, sebab ada bagian

tenaga mekanik yang terdesipasi menjadi panas sehingga tenaga kinetik yang diperoleh tidak lagi sebanyak, melainkan lebih sedikit daripada, berkurangnya tenaga potensial.
Percobaan menunjukkan bahwa banyaknya panas yang timbul karena adanya gesekan selalu sebanding dengan tenaga mekanik yang terdisipasi. Jadi panas dapat dipandang sebagai bentuk tenaga dan tenaga total terdiri atas tenaga mekanik dan tenaga panas. Jadi bagaimanapun juga tenaga total selalu tetap atau kekal. Pernyataan demikian dikenal sebagai hukum kekekalan tenaga. Dalam Termodinamika hukum kekekalan tenaga ini terumuskan pula sebagai hukum termodinamika ke I.

2. Gerakan di dalam Sistem Koordinat yang Berputar

Kita tinjau suatu titik materi m yang massanya m, yang bergerak di dalam bidang sistem koordinat dua dimensi.
Karena secara umum tempat titik materi hendak kita nyatakan dengan vektor tempat r bukannya dengan koordinat-koordinat x dan y, maka untuk mempelajari gerakannya akan lebih mudah kalau dipakai sistem koordinat polar. Untuk itu gerakannya hendak kita uraikan menjadi komponen-komponen radial dan tangensial; yang dimaksud dengan komponen tangensial ialah komponen yang tegak lurus radial pada arah membesarnya sudut θ di dalam sistem koordinat polar.
Jadi dilihat dari sistem koordinat yang tetap, kita boleh dikatakan mendirikan sistem koordinat Cartesian lain yang berputar mengikuti perputaran titik materi tersebut. Agar jelasnya kita perhatikan gambar I.2.



Gambar I.2.
Gerakan di dalam sistem koordinat yang berputar.

Misalkan vektor-vektor satuan di dalam sistem koordinat yang berputar itu ialah $\hat{\underset{\sim}{r}}$ dan $\hat{\underset{\sim}{s}}$ dengan $\hat{\underset{\sim}{r}}$ yang dibuat selalu berimpit dengan vektor tempat r.
Jadi tempat titik materi akan ternyatakan sebagai $\underset{\sim}{r} = r\,\hat{\underset{\sim}{r}}$.

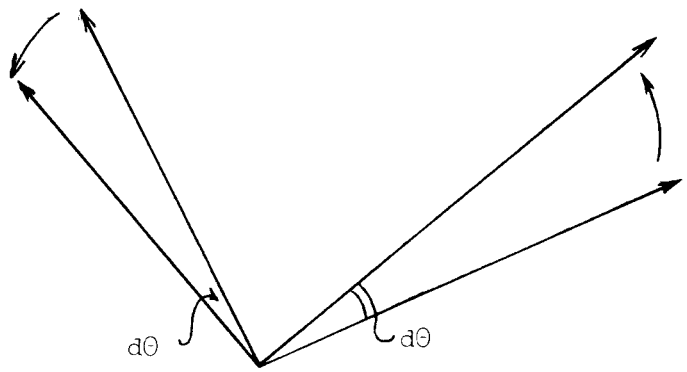
Demikianlah maka kita jabarkan rumus-rumus kecepatan dan percepatan sebagai berikut. Untuk singkatnya kita tulis $\frac{d}{dt}$ dengan titik di atasnya, misalnya $\frac{d\underset{\sim}{r}}{dt}$ kita tulis sebagai $\dot{\underset{\sim}{r}}$ dan seterusnya.

Maka kecepatan dan percepatannya diberikan oleh

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{r}\,\hat{\underset{\sim}{r}} + r\,\dot{\hat{\underset{\sim}{r}}}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = \ddot{r}\,\hat{\underset{\sim}{r}} + \dot{r}\,\dot{\hat{\underset{\sim}{r}}} + \dot{r}\,\dot{\hat{\underset{\sim}{r}}} + r\,\ddot{\hat{\underset{\sim}{r}}}$$

Dengan memperhatikan gambar I.3. di bawah ini



Gambar I.3.
Increment vektor-vektor satuan.

$d\hat{\underset{\sim}{r}}$ dan $d\hat{\underset{\sim}{s}}$

jelaslah bahwa

$$d\hat{r} = |d\hat{\underset{\sim}{r}}| = \hat{r}\,d\theta = d\theta$$

$$d\hat{s} = d\hat{\underset{\sim}{s}} = \hat{s}\,d\theta = d\theta$$

sebab $\hat{r} = 1$ dan $\hat{s} = 1$.

Selanjutnya di gambar I.3. terlihat bahwa vektor $d\hat{\underset{\sim}{r}}$ adalah pada arah $\hat{\underset{\sim}{s}}$ dan vektor $d\hat{\underset{\sim}{s}}$ adalah pada arah $-\hat{\underset{\sim}{r}}$.

Jadi kita dapatkan

$$d\hat{\underset{\sim}{r}} = \hat{\underset{\sim}{s}}\ d\Theta \text{ dan } d\hat{\underset{\sim}{s}} = -\hat{\underset{\sim}{r}}\ d\theta$$

sehingga selanjutnya

$$\dot{\hat{\underset{\sim}{r}}} = \hat{\underset{\sim}{s}}\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\hat{\underset{\sim}{s}} \text{ dan } \dot{\hat{\underset{\sim}{s}}} = -\hat{\underset{\sim}{r}}\,\dot{\theta} = -\dot{\theta}\,\hat{\underset{\sim}{r}}$$

$$\ddot{\hat{\underset{\sim}{r}}} = \ddot{\theta}\,\hat{\underset{\sim}{s}} - \dot{\theta}^2\,\hat{\underset{\sim}{r}}$$

$$\ddot{\hat{\underset{\sim}{s}}} = -\ddot{\theta}\,\hat{\underset{\sim}{r}} - \dot{\theta}^2\,\hat{\underset{\sim}{s}}$$

Dengan demikian persamaan-persamaan untuk kecepatan dan percepatannya menjadi

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \dot{r}\,\hat{\underset{\sim}{r}} + \dot{\theta}\,r\,\hat{\underset{\sim}{s}} \tag{2}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\,\hat{\underset{\sim}{r}} + (2\dot{\theta}\dot{r} + \ddot{\theta}r)\,\hat{\underset{\sim}{s}}\ . \tag{3}$$

Dengan menuliskan $\theta = \omega$, dari persamaan (3) hukum Newton ke II menjadi

$$\underset{\sim}{F} = m\,\ddot{\underset{\sim}{r}} = m\,\ddot{r}\,\hat{\underset{\sim}{r}} - m\,\omega^2\,r\,\hat{\underset{\sim}{r}} + 2\,m\,\omega\dot{r}\,\hat{\underset{\sim}{s}} + m\dot{\omega}\,r\,\hat{\underset{\sim}{s}}\ . \tag{4}$$

Untuk titik materi yang bergerak berputar dengan kecepatan sudut ω yang tetap, sudah tentu $\dot{\omega} = 0$ dan $\dot{r} = 0$, sehingga gaya yang membuatnya berputar melingkar beraturan demikian adalah

$$\underset{\sim}{F} = -m\omega^2 r\hat{r} \tag{5}$$

Gaya ini adalah pada arah radial menuju ke pusat dan dikenal sebagai gaya sentripetal.
Kalau titik materi tersebut kecuali bergerak melingkar dengan kecepatan sudut ω yang tetap juga bergerak secara radial dengan kecepatan v yang tetap, maka gaya yang menggerakkannya demikian diberikan oleh

$$\underset{\sim}{F} = -m\omega^2\,r\,\hat{\underset{\sim}{r}} + 2\,m\omega v\,\hat{\underset{\sim}{s}}\ . \tag{6}$$

Suku kedua ruas kanan persamaan (6) adalah pada arah tegak lurus arah radial dan disebut gaya koriolis. Gaya koriolis demikian misalnya yang dialami oleh angin di permukaan bumi yang bergerak dari daerah sedang ke daerah katulistiwa; gaya koriolis pada angin ini disebabkan oleh rotasi bumi.

Marilah kita perhatikan persamaan (2); suku pertama ruas kanan persamaan itu yaitu $\dot{r}\,\hat{r}$ adalah kecepatan pada arah radial dilihat dari sistem koordinat yang berputar, yakni $\underset{\sim}{v}^*$ misalnya. Demikianlah pula suku pertama ruas kanan persamaan (3) yaitu $\ddot{r}\,\hat{r}$ adalah percepatan radial dilihat dari sistem koordinat yang berputar, yakni $\underset{\sim}{a}^*$ misalnya.

Tetapi sebenarnya vektor kecepatan dan vektor percepatan tidaklah tergantung pada letak titik pusat sistem koordinat. Jadi terhadap sembarang titik pusat sistem koordinat yang manapun di bidang sistem koordinat yang berputar itu, titik materi m tampak bergerak dengan kecepatan $\underset{\sim}{v}^*$ dan percepatan $\underset{\sim}{a}^*$.
Jadi dengan menuliskan $\dot{r}\,\hat{r}$ dengan v^* dan $\ddot{r}\,\hat{r}$ dengan $\underset{\sim}{a}^*$ dalam persamaan (3) kita dapatkan hubungan antara kecepatan dan percepatan di sistem koordinat tetap dengan yang di sistem koordinat yang berputar.
Dengan mendefinisikan vektor rotasi $\underset{\sim}{\omega}$ sebagai vektor yang arahnya sama dengan arah $\hat{r} \times \hat{s}$ yakni pada arah bergerak maju atau mundurnya sekrup yang diputar mengikuti perputaran sistem koordinat yang berputar, maka vektor $\hat{s}$ adalah pada arah $\omega \times r$, sehingga persamaan (2) dan persamaan (3) di atas dapat dituliskan sebagai persamaan vektor selengkapnya yang menghubungkan kecepatan dan percepatan di kedua sistem koordinat, dalam bentuk

$$\underset{\sim}{\dot{r}} = \underset{\sim}{v}^* + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (7)$$

$$\underset{\sim}{\ddot{r}} = \underset{\sim}{a}^* + 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^* + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (8)$$

Kecepatan v^* dan percepatan a^* lazim disebut kecepatan dan percepatan transport.
Persamaan (7) dan persamaan (8) tak lain menyatakan hubungan antara kecepatan dan percepatan yang sesungguhnya yaitu sebagaimana dilihat dari sistem koordinat yang tetap, dengan kecepatan dan percepatan yang terlihat dari sistem koordinat yang berputar.

Kita tinjau sekarang suatu titik yang tinggal diam di sistem koordinat yang berputar dengan kecepatan sudut $\underset{\sim}{\omega}$ yang tetap. Maka untuk titik ini $\underset{\sim}{v}^* = 0$ dan $\underset{\sim}{a}^* = 0$ sehingga

$$\underset{\sim}{\ddot{r}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}$$

Titik tersebut terlihat dari sistem koordinat yang tetap akan tampak melingkar beraturan dengan percepatan $\omega \times \omega \times r$ yakni sebesar $\omega^2 r$ pada arah menuju ke pusat sistem koordinat.
Percepatan ini tak lain ialah yang kita kenal sebagai percepatan sentripetal. Adapun untuk titik yang bergerak dengan kecepatan v^* yang tetap di sistem koordinat yang berputar, yang berarti pula $a^* = 0$, dilihat dari sistem koordinat yang tetap akan terlihat bergerak dengan percepatan

$$\underset{\sim}{\ddot{r}} = 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^* + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}$$

yang berarti di samping dengan percepatan sentripetal juga dengan percepatan $2\,\omega \times v^*$ yang arahnya tegak lurus arah kecepatannya v^* dan pada arah berputarnya sistem koordinat yang berputar. Percepatan ini tak lain ialah yang kita kenal sebagai percepatan koriolis.

Dari hukum Newton ke II, F = m a dan hukum Newton ke III, reaksi = aksi, suatu titik materi yang semula diam, apabila dipaksa untuk berputar mengikuti perputaran sistem koordinat, akan memberikan gaya reaksi enersial sebesar $m\,\omega^2\,r$ pada arah menjauhi pusat sistem koordinat yang berputar. Gaya tersebut yang disebut gaya sentrifugal, akan menyebabkan titik materi itu terpelanting ke arah radial apabila tidak dipegang tetap di sistem koordinat yang berputar. Jadi untuk mempertahankan titik materi itu tetap tinggal diam di sistem koordinat yang berputar, diperlukan gaya sentripetal untuk melawan gaya sentrifugal tersebut. Demikianlah pula suatu titik materi yang semula bergerak lurus dari titik pusat sistem koordinat 0, apabila sekarang dipaksa untuk berputar mengikuti perputaran sistem koordinat yang berputar, yang berpusatkan di 0 , akan memberikan gaya reaksi enersial yang kecuali gaya sentrifugal juga gaya sebesar $2\,m\,\omega\,v^*$ pada arah melawan perputaran.
Akibatnya titik materi itu tidak lagi bergerak sepanjang garis lurus, melainkan akan terpelanting melengkung. Jadi untuk mempertahankan gerak annya yang lurus sepanjang arah radial dengan kecepatan v^* yang tetap di sistem koordinat yang berputar, diperlukan gaya sentripetal dan gaya koriolis sebesar $2\,m\,\omega\,v^*$.

3. Gerakan di Permukaan Bumi

Sistem koordinat di permukaan bumi sebenarnya adalah sistem koordinat yang berputar mengikuti rotasi bumi pada porosnya. Maka rumus - rumus mekanika di permukaan bumi kalau dikehendaki lebih tepat harus dikoreksi seperlunya.
Misalnya rumus hukum Newton ke II di permukaan bumi yang tepat adalah

$$\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a^*} + 2\,m\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v^*} + m\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (9)$$

Jadi dilihat dari muka bumi, gaya F akan terasakan sebagai

$$\underset{\sim}{F^*} = m\,\underset{\sim}{a^*} = \underset{\sim}{F} - 2\,m\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v^*} - m\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (10)$$

Suku-suku kedua dan ketiga ruas kanan tak lain ialah suku-suku koreksi koriolis dan sentrifugal.
Demikianlah maka persamaan gerak untuk benda jatuh bebas tepatnya diberikan oleh

$$\underset{\sim}{B} = m\,\underset{\sim}{g} = m\,\underset{\sim}{a^*} + 2\,m\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v^*} + m\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}$$

yang menghasilkan percepatan sebagaimana terlihat dari muka bumi sebesar

$$\underset{\sim}{a^*} = \underset{\sim}{g} - 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v^*} - \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (11)$$

Pada hakekatnya suku sentrifugal $\omega \times \omega \times r$ adalah cukup kecil dibanding kan dengan suku-suku yang lain. Dengan mengingat bahwa $\omega = 2\pi /$ 24 jam, dan jari-jari bumi $r = 6{,}38 \times 10^8$ cm, kita hitung $\omega \times \omega \times r =$ 3,38 cm/ detik sedangkan g kira-kira sebesar 980 cm / detik^2.
Jadi koreksi sentrifugal ini kira-kira hanya 3.38 / 980 yakni sekitar 0,34% saja.

Dengan mengabaikan efek sentrifugal, persamaan (11) menjadi

$$\underset{\sim}{a}^* = \underset{\sim}{g} - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^* \qquad (12)$$

Yang menunjukkan bahwa benda yang jatuh bebas, jatuhnya tidak tepat menuju ke pusat bumi, meskipun gaya tarik bumi, yakni gaya berat atau gaya gravitasi, adalah ke arah pusat bumi.
Lebih lanjut pengintegralan persamaan (12) terhadap t akan memberikan kecepatan

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{v}^* &= \underset{\sim o}{v}^* + \underset{\sim}{g}t - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \int \underset{\sim}{v}^* \, dt \\
&= \underset{\sim o}{v}^* + \underset{\sim}{g}t - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \int (\underset{\sim o}{v}^* + \underset{\sim}{g}t - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \int \underset{\sim}{v}^* \, dt)\, dt \\
&= \underset{\sim o}{v}^* + \underset{\sim}{g}t - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim o}{r}^* + \underset{\sim o}{v}^* t + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{g}t^2 - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \int r^* \, dt) \\
&= \underset{\sim o}{v}^* + \underset{\sim}{g}t - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim o}{r}^* + \underset{\sim o}{v}^* + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{g}t^2) \qquad (13)
\end{aligned}$$

karena suku dengan $\omega \times \omega \times$ adalah cukup kecil dan dapat diabaikan. Adapun $\underset{\sim o}{v}^*$ dan $\underset{\sim o}{a}^*$ adalah harga-harga v^* dan a^* pada saat $t = 0$.
Akhirnya pengintegralan persamaan (13) menghasilkan

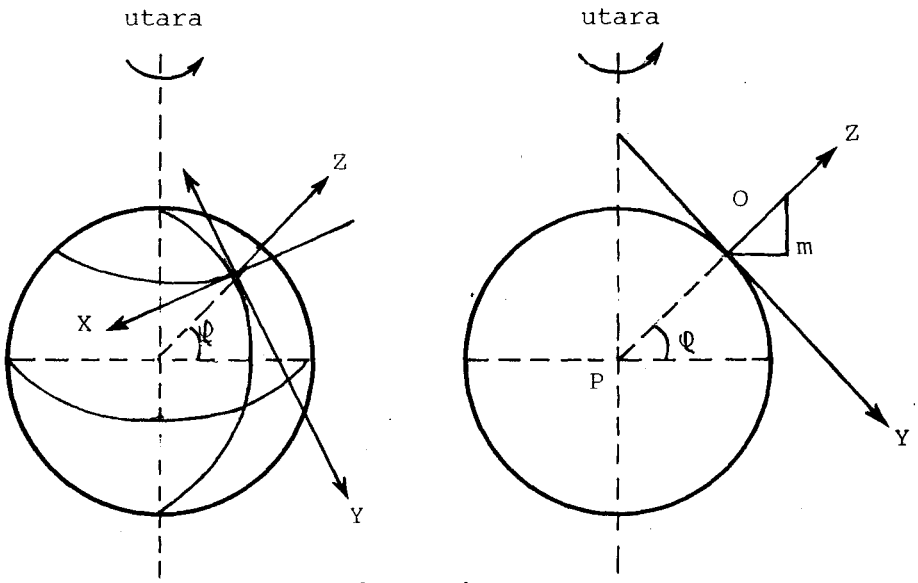
$$\begin{aligned}
r^* &= \underset{\sim o}{r}^* + \underset{\sim o}{v}^* t + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{g}t^2 - 2\underset{\sim}{\omega} \times \int (\underset{\sim o}{r}^* + \underset{\sim o}{v}^* t + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{g}t^2)\, dt \\
&= \underset{\sim o}{r}^* + \underset{\sim o}{v}^* t + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{g}t^2 - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim o}{r}^* t + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim o}{v}^* t^2 + \frac{1}{6}\,\underset{\sim}{g}t^3) \qquad (14)
\end{aligned}$$

di mana $\underset{\sim o}{r}^*$ adalah harga $\underset{\sim}{r}^*$ pada saat $t = 0$.

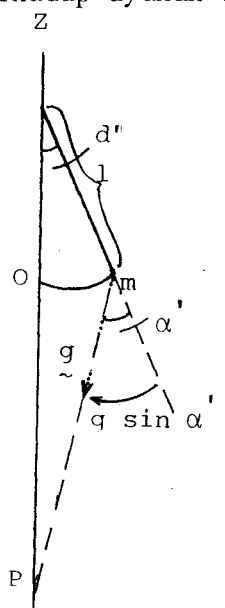
Jadi adanya efek koriolis menimbulkan suku dengan $2\,\underset{\sim}{\omega} \times$ selaku suku koreksi koriolis.

4. Bandul Foucolt

Pada tahun 1851 Foucolt melakukan percobaan untuk meyakinkan adanya rotasi bumi pada porosnya, dengan suatu bandul yang cukup berat digantungkan pada tali panjang agar dapat tahan berayun-ayun berjam-jam. Karena adanya rotasi bumi, tentunya berayun-ayunnya bandul bersama talinya tidak akan berada di suatu bidang vertikal yang tetap tertentu; artinya, bandul akan berayun-ayun sambil berputar. Kita hendak menyelidiki bentuk lintasan bandul itu. Kita tinjau bandul Foucolt yang berada di daerah yang lintang tempatnya φ. Kita perhatikan gambar I.4 dan gambar I.5.



Gambar I.4.
Efek koriolis terhadap ayunan bandul.



Gambar I.5.
Diagram untuk menganalisa ayunan bandul.

Kita ambil sistem koordinat Cartesian dengan sumbu x pada arah timur-barat dan sumbu Y pada arah utara-selatan sedangkan sumbu Z adalah pada arah vertikal.
Bandul yang massanya m berayun-ayun di sekitar titik setimbang O. Letak massa m terhadap titik setimbang O dinyatakan dengan vektor tempat ρ.; misalkan panjang tali itu adalah 1 dan gaya tegangan tali adalah T; gaya tegangan tali T ini adalah gaya reaksi daripada komponen gaya berat mg pada arah sepanjang tali ke bawah.
Jelaslah bahwa gaya yang menggerakkan bandul ialah komponen gaya berat yang pada arah tegak lurus arah tali, yaitu mg sin α' seperti yang tertera di gambar I.5.

Karena jarak bandul ke pusat bumi yakni $\overline{mP}$ jauh melebihi panjang tali 1, maka $\alpha' \approx \alpha$. Lagi pula untuk α yang cukup kecil, $\sin\alpha \approx \frac{\rho}{1}$ sehingga mg $\sin\alpha' \approx$ mg $\sin\alpha \approx$ mg $\frac{\rho}{1}$.

Gaya yang mengayunkan bandul sebesar mg ρ/ 1 ini adalah pada arah yang berlawanan dengan arah $\underset{\sim}{\rho}$ sehingga gaya tersebut dapat ditulis sebagai - (mg / 1) $\underset{\sim}{\rho}$.

Dengan demikian persamaan geraknya diberikan oleh

$$\underset{\sim}{a}^* = -\frac{g}{1}\underset{\sim}{\rho} - 2\,\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^*$$

Tanpa suku kedua, yakni suku koreksi koriolis, persamaan ini tak lain ialah persamaan gerak bandul tunggal yang menghasilkan getaran harmonik yang periodenya $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$

Selanjutnya dari gambar I.4 kita dapatkan

$$\underset{\sim}{\rho} = x\,\underset{\sim}{\hat{i}} + y\,\underset{\sim}{\hat{j}} + z\,\underset{\sim}{\hat{k}}$$

di mana $\hat{i}$, $\hat{j}$, dan $\hat{k}$, ialah vektor-vektor satuan sepanjang sumbu - sumbu koordinat X, Y dan Z.

Dari aljabar vektor, kita dapat menulis

$$\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^* = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{\hat{i}} & \underset{\sim}{\hat{j}} & \underset{\sim}{\hat{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v^*_x & v^*_y & v^*_z \end{vmatrix}$$

Dari gambar I.4 jelaslah bahwa sumbu X tegak lurus $\underset{\sim}{\omega}$ sehingga $\omega_x = 0$, sedang $\omega_y = -\omega\cos\varphi$ dan $\omega_z = \omega\sin\varphi$.

Adapun v^*_x , v^*_y dan v^*_z tak lain ialah $\dot{x}$, $\dot{y}$ dan $\dot{z}$.

Karena ayunannya cukup kecil, gerakan bandul boleh dikatakan berada di bidang datar, maksudnya komponen gerakan ke atas dan ke bawahnya boleh diabaikan yang berarti $v^*_z = \dot{z} \approx 0$.

Dengan mengingat hal-hal tersebut, kita peroleh

$$\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}^* = (-\omega\,\dot{y}\sin\varphi)\,\underset{\sim}{\hat{i}} + (\omega\,\dot{x}\sin\varphi)\,\underset{\sim}{\hat{j}} + (\omega\,\dot{x}\cos\varphi)\,\underset{\sim}{\hat{k}}$$

dan akhirnya persamaan di atas menghasilkan

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{1}x + 2\omega\dot{y}\sin\varphi \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{1}y - 2\omega\dot{x}\sin\varphi \end{aligned} \qquad (15)$$

Lagi, tanpa suku kedua, suku koreksi koriolis, persamaan (15) ini tak lain ialah persamaan getaran harmonik yang periodenya

$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$ dan yang diuraikan menjadi komponen-komponen pada arah-arah sumbu X dan sumbu Y.

Persamaan (15) di atas menghubungkan gerakan-gerakan sepanjang sumbu X dan sepanjang sumbu Y yang berarti menentukan bentuk lintasan bandul. Untuk meneliti bentuk lintasannya, kita gabungkan kedua persamaan (15) di atas dengan menuliskan

$$u = x + iy$$

di mana $i = \sqrt{-1}$, yakni dengan mengingat resultante simpangan yang diberikan oleh $\sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Dengan penulisan demikian, akan kita peroleh

$$\ddot{u} = -(2\omega i \sin\varphi)\dot{u} - \frac{g}{l}u \qquad (16)$$

Persamaan ini menyerupai persamaan getaran teredam dengan suku pertama ruas kanan selaku suku redaman.

Maka kita cobakan penyelesaian dalam bentuk

$$u = A e^{\lambda t}$$

Ini akan memberikan

$$\dot{u} = \lambda A e^{\lambda t} \quad \text{dan} \quad \ddot{u} = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

Apabila harga-harga $\dot{u}$ dan $\ddot{u}$ ini kita masukkan ke persamaan (16), maka akan kita dapatkan

$$\lambda^2 = -(2\omega i \sin\varphi)\lambda - \frac{g}{l}$$

yang lalu menghasilkan

$$\lambda = -\omega i \sin\varphi \pm i\alpha$$

dengan

$$\alpha = \sqrt{(\omega^2 \sin^2\varphi + \frac{g}{l})}$$

yang dengan mensubstitusikannya ke penyelesaian di atas menghasilkan

$$u = A e^{-i\omega t \sin\varphi} e^{\pm i\alpha t}$$

yang lalu menghasilkan penyelesaian umum dalam bentuk

$$u = e^{-i\omega t \sin\varphi}(ae^{i\alpha t} + be^{-i\alpha t})$$

Selanjutnya dengan mengingat

$$e^{\pm i \alpha t} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t$$

penyelesaian di atas menjadi berwujud

$$u = u_o e^{-i \omega t \sin \varphi}$$

dengan

$$u_o = (a + b) \cos \alpha t + i(a - b) \sin \alpha t$$

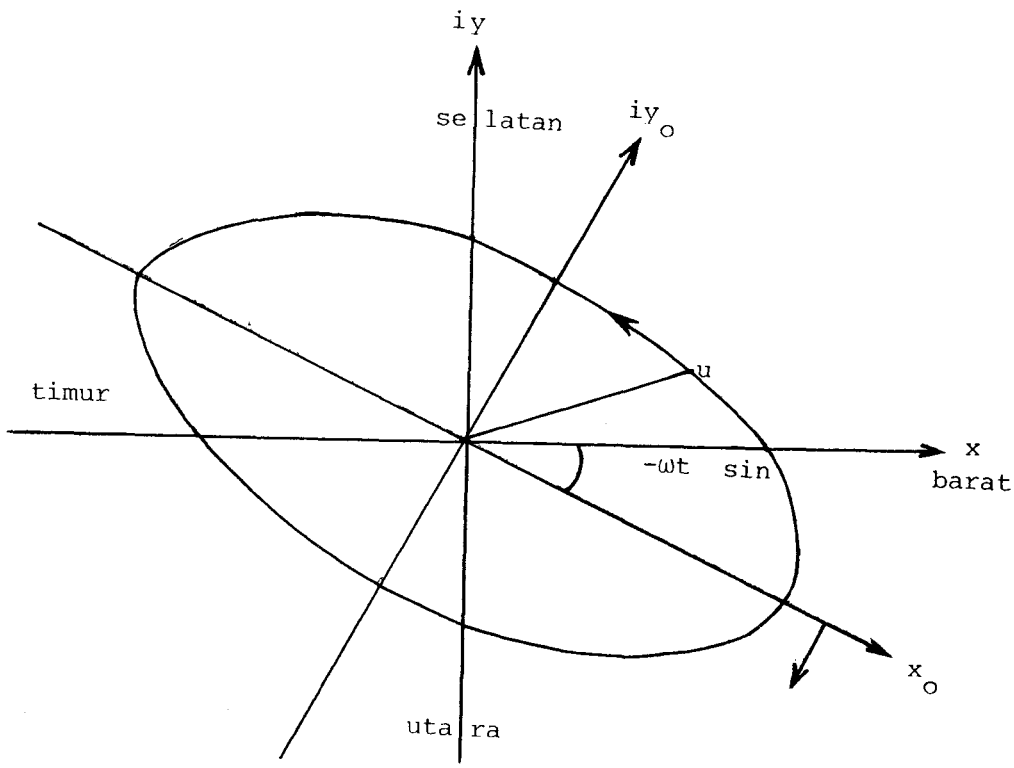
Dengan menuliskan

$$u_o = x_o + i y_o$$

$$x_o = (a + b) \cos \alpha t$$

$$y_o = (a - b) \sin \alpha t$$

maka u_o dapat dipandang menyatakan letak suatu titik di dalam diagram komplex Argand yang koordinat-koordinatnya ialah x_o dan y_o. Untuk jelasnya kita perhatikan gambar I.6.



Gambar I.6.
Lintasan ayunan bandul di permukaan bumi.

Dari persamaan di atas terlihat bahwa variasi x_o dan y_o terhadap waktu senantiasa menurutkan hubungan

$$\frac{x_o^2}{(a+b)^2} + \frac{y_o^2}{(a+b)^2} = 1$$

yakni memenuhi persamaan elips.

Jadi titik u_o bergerak sepanjang lintasan elips dengan periode

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Oleh karena sebenarnya ω cukup kecil, maka $\alpha \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$ sehingga

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

yakni hampir sama dengan periode ayunan bandul yang lazim kita kenal itu.
Lebih lanjut, persamaan (17) menunjukkan bahwa lintasan bandul yang sebenarnya, yakni yang diberikan oleh u, adalah lintasan titik u_o yang berputar dengan kecepatan sudut $-\omega \sin \varphi$.
Dengan mengamati gambar I.6 kita perhatikan bahwa dilihat dari sistem koordinat X - Y yang tetap di permukaan bumi, lintasan bandul adalah elips yang berputar pada sumbu Z pada arah barat ke utara ke timur ke selatan. Dengan perkataan lain bandul akan berayun sepanjang elips sambil berputar sekeliling sumbu vertikal menurutkan perputaran elips lintasannya. Adapun periode perputaran itu menurut persamaan (17) diberikan oleh

$$T' = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} \qquad (18)$$

Untuk bandul yang berada di sebelah selatan katulistiwa, arah perputaran itu adalah sebaliknya, yakni pada arah dari barat ke selatan ke timur lalu ke utara. Hal ini ternyatakan pula dari negatifnya harga sin φ karena $\varphi < 0$, sehingga kecepatan sudutnyapun yang diberikan oleh $-\omega \sin\varphi$ berharga berlawanan dengan kecepatan sudut untuk φ yang positif yakni untuk tempat di sebelah utara katulistiwa.
Di daerah katulistiwa, $\varphi = 0$ sehingga $T' = \infty$ yang berarti bandul tidak berputar, sedangkan di daerah kutub, $\varphi = 90^o$ sehingga $T' = 2\pi/\omega = 24$ jam yakni paling pendek kalau dibandingkan dengan periode putaran untuk di daerah lainnya.

5. Gaya Sentral

Yang dimaksudkan dengan gaya sentral ialah gaya yang selalu menuju ke atau mengarah dari suatu pusat, dan besarnya hanya tergantung pada jaraknya dari pusat itu.
Dengan mengambil pusat tersebut sebagai pusat sistem koordinat, gaya sentral itu dapat ditulis sebagai

$$\underset{\sim}{F} = F(r)\ \hat{r} \qquad (19)$$

Jadi menurut persamaan (3) percepatannya ialah

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} \tag{20}$$

dan

$$2\dot{\theta}\dot{r} + \ddot{\theta} r = 0 \tag{21}$$

Dari persamaan (20), dengan mengalikan kedua ruasnya dengan $\underset{\sim}{r}$ x kita dapat

$$\underset{\sim}{r} \times \ddot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{0}$$

sebab $\hat{r} \times \hat{r} = \underset{\sim}{0}$

Akan tetapi di lain pihak

$$\underset{\sim}{r} \times \ddot{\underset{\sim}{r}} = -\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{r}}\right) - \dot{\underset{\sim}{r}} \times \dot{\underset{\sim}{r}}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{r}}\right)$$

karena $\dot{\underset{\sim}{r}} \times \dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{0}$. Jadi kita dapat menarik kesimpulan bahwa

$$\underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{r}} = \text{tetap}$$

Ini berarti bahwa vektor yang tegak lurus $\underset{\sim}{r}$ dan $\dot{\underset{\sim}{r}}$ adalah tetap. Tetapi bidang lintasan adalah bidang yang mengandung vektor koordinat $\underset{\sim}{r}$ dan vektor kecepatan $\dot{r}$ yang berarti bidang lintasan itu tegak lurus vektor $\underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{r}}$ yang menurut di atas adalah tetap. Dengan demikian maka sudah tentu ini berarti bahwa bidang lintasannya tetap atau dengan perkataan lain lintasannya adalah koplanar yakni ada di bidang datar tertentu.

Dari persamaan (21) dengan mengingat bahwa persamaan (21) itu dapat pula dituliskan sebagai

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta} r^2\right) = 0$$

kita dapat menarik kesimpulan bahwa $\dot{\theta} r^2$ adalah tetap, misalnya sama dengan suatu tetapan h; atau dirumuskan

$$\dot{\theta} r^2 = h = \text{tetap} \tag{22}$$

Kita perhatikan bahwa ruas kiri persamaan (22) tersebut adalah momen daripada kecepatan sehingga kalau dikalikan massa m menjadi suatu impuls putar. Maka hendak kita selidiki apakah memang impuls putar, yakni momen daripada impuls, untuk gerakan titik materi oleh gaya sentral adalah tetap.

Adapaun impuls putar terhadap suatu titik pusat koordinat, didefinisikan sebagai

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{r} \times m \dot{\underset{\sim}{r}}$$

Jadi dengan mengingat persamaan (2) impuls putar itu ialah

$$\underset{\sim}{H} = m \underset{\sim}{r} \times (\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{s})$$

$$= m\, r\, \hat{r} \times (\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{s})$$

Dengan mengingat bahwa $\hat{r} \times \hat{r} = \underset{\sim}{0}$, maka impuls putar itu adalah

$$\underset{\sim}{H} = m\,\dot{\theta}\, r^2\, \hat{r} \times \hat{s} \qquad (23)$$

Untuk gaya sentral, berlaku persamaan (22) sehingga

$$\underset{\sim}{H} = m\, h\, \hat{r} \times \hat{s} = m \underset{\sim}{h}$$

dengan $\underset{\sim}{h}$ ialah suatu vektor yang besarnya h dan arahnya pada arah $\hat{r} \times \hat{s}$ yang berarti sejajar arah sumbu putar.
Demikianlah maka karena $r \times \dot{r}$ adalah tetap dan h adalah tetap, maka besarnya maupun arahnya impuls putar oleh gaya sentral adalah tetap; atau singkatnya $\underset{\sim}{H}$ = tetap.

Berikut ini hendak kita selidiki persamaan gerak oleh gaya sentral. Kerapkali persamaan gerak lebih mudah dijabarkan dari hukum kekekalan tenaga mekanik.
Untuk gerakan oleh gaya sentral, kiranya persamaan geraknya akan lebih mudah dipelajari apabila dipakai sistem koordinat polar. Di dalam sistem koordinat polar, persamaan gerak itu tentunya akan berwujud hubungan fungsional antara koordinat r dan θ dan waktu t dengan tenaga total yang tetap tertentu dan tenaga potensial $V = V(r)$ selaku parameter-parameternya.
Kita mulai dengan menjabarkan tenaga kinetik K.

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \underset{\sim}{v} . \underset{\sim}{v} = \tfrac{1}{2} m \dot{\underset{\sim}{r}} . \dot{\underset{\sim}{r}}$$

$$= \tfrac{1}{2} (\dot{r}\,\underset{\sim}{\hat{r}} + r\,\dot{\theta}\,\underset{\sim}{\hat{s}}) \; . \; (\dot{r}\,\underset{\sim}{\hat{r}} + r\,\dot{\theta}\,\underset{\sim}{\hat{s}})$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

atau

$$K = \tfrac{1}{2} m \dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} m \frac{h^2}{r^2} \qquad (24)$$

dengan mengingat $\hat{r} . \hat{s} = 0$ karena $\hat{r} \perp \hat{s}$ dan mengingat pula persamaan (22). Perlu diperhatikan bahwa $\dot{r} \neq |\underset{\sim}{v}| = |\dot{\underset{\sim}{r}}|$, dan $\dot{r}$ ini ialah perubahan jarak radial per satuan waktu, bukannya kecepatan.
Selanjutnya dari hukum kekekalan tenaga mekanika

$$E = K + V(r)$$

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

dan persamaan (24) di atas kita peroleh

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}} \qquad (25)$$

yang lalu menghasilkan

$$dr = dt \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}$$

dan

$$t = \int_{r_o}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}} \qquad (26)$$

di mana r_o ialah harga r pada saat t = 0, yakni berhubungan dengan kedudukan awal titik materi. Persamaan (26) ini menghubungkan kedudukan titik materi r dengan waktu t, dengan menyatakan t sebagai fungsi r. (Bukannya r sebagai fungsi t).
Lebih lanjut dengan menuliskan

$$\dot{r} = \frac{dr}{dr} = \frac{dr}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dt}$$

persamaan (25) bersama persamaan (22) menghasilkan

$$\frac{dr}{d\Theta} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}} \Big/ \frac{h}{r^2} \qquad (27)$$

yang lalu memberikan

$$\Theta = \Theta_o + h \int_{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{h^2}{r^2}}} \qquad (28)$$

Adapun bentuk lintasannya akan diberikan oleh hubungan fungsional antara variabel-variabel r dan Θ. Hubungan ini ternyata lebih mudah diperoleh dengan substitusi.

$$u = \frac{1}{r}$$

Dengan substitusi ini, kita menulis

$$dr = -\frac{1}{u^2}\,du$$

dan

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\theta}$$

yang bersama persamaan (27) menghasilkan

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - h^2u^2} \qquad (29)$$

Dari persamaan ini kita peroleh harga nol untuk $\frac{du}{d\theta}$, yakni yang sedemi - kian rupa hingga

$$\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - h^2u^2 = 0$$

yang berarti

$$u = u_o \pm \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m}}$$

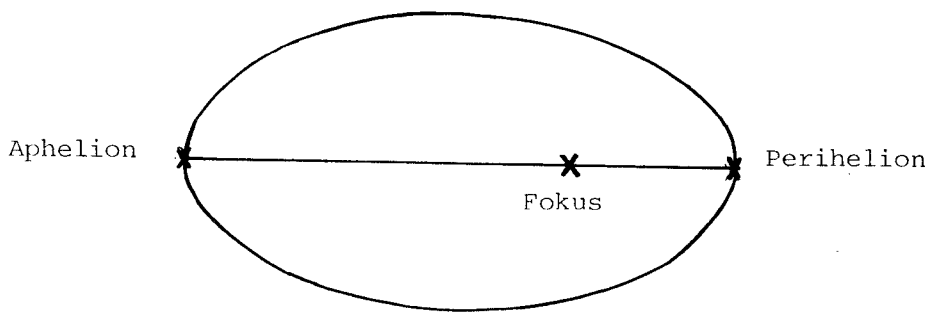
atau

$$r = r_o = \pm \frac{h}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m}}} \qquad (30)$$

Adapun $\frac{du}{d\theta} = 0$ berarti perubahan u terhadap perubahan θ adalah nol, arti nya ditempat itu perubahan tidak mempengaruhi u yang berarti tidak mem pengaruhi r.

Ini berarti bahwa di tempat hal ini terjadi, arah lintasannya adalah te- gak lurus arah radial.

Seandainya lintasannya berbentuk elips seperti terlukis pada gambar I.7 maka tempat di mana hal tersebut terjadi, yakni yang disebut apses, ada



Gambar I.7.
Aphelion dan perihelion

lah di sebelah menyebelah titik fokus elips sepanjang sumbu panjangnya. Apses untuk lintasan elips demikian disebut perihelion untuk yang dekat titik fokus dan aphelion untuk yang satu lainnya.

Contoh gaya sentral yang kita jumpai sehari-hari ialah gaya elastik, gaya elektrostatik dan gaya gravitasi. Gaya-gaya itu berturut-turut dapat dituliskan dalam bentuk

$$\underset{\sim}{F} = - k\underset{\sim}{r} = - kr\hat{\underset{\sim}{r}}$$

$$\underset{\sim}{F} = \pm \frac{k}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}}$$

$$\underset{\sim}{F} = - \frac{k}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}}$$

6. Hukum-hukum Keppler

Gerakan planet-planet, termasuk bumi, sekeliling matahari, tak lain disebabkan oleh gaya tarik matahari yang adalah gaya sentral dengan matahari selaku pusatnya.
Johannes Keppler (1571 - 1630) adalah orang yang pertama-tama merumuskan lintasan planet-planet sekeliling matahari yang kemudian dikenal sebagai hukum-hukum Keppler I, II dan III yang hendak kita bicarakan berikut ini.
Kita selidiki gerakan oleh gaya gravitasi untuk mempelajari gerakan planet-planet sekeliling matahari. Sebagaimana besar gaya gravitasi itu berbanding terbalik dengan kwadrat jarak dan pada arah ke pusat, maka begitu juga halnya dengan percepatan gravitasi. Jadi percepatan gravitasi itu berbentuk

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = - \frac{a}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}} \qquad (31)$$

Persamaan (31) ini bersama persamaan (20) memberikan

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 = - \frac{a}{r^2}$$

yang dengan mengingat persamaan (22) serta dengan substitusi

$$u = \frac{1}{r}$$

menjadi

$$\ddot{r} = h^2u^3 = - au^2 \qquad (32)$$

Untuk menyatakan r sebagai fungsi u dan θ, kita tulis

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta}$$

yang dengan persamaan (22) dan substitusi $u = \frac{1}{r}$ memberikan

$$\dot{r} - hu^2 = \frac{d\frac{1}{u}}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}$$

Selanjutnya

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = hu^2 \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$= -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

sehingga persamaan (31) menjadi

$$h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -au^2$$

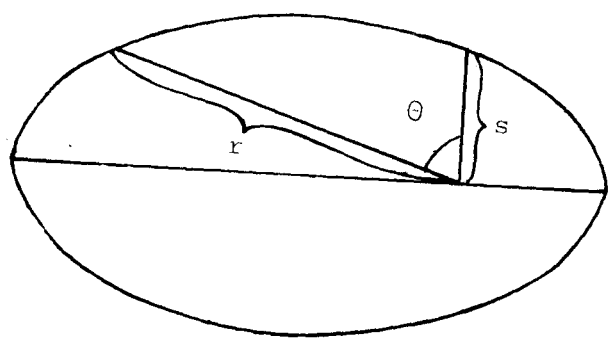
atau

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a}{h^2} \qquad (33)$$

Persamaan (33) ini adalah persamaan irisan kerucut yang semilatus rectum-nya adalah

$$s = \frac{h^2}{a}$$

Untuk jelasnya, kita perhatikan gambar I.8 di bawah ini.



Gambar I.8.
Semi-latus rectum elips.

Persamaan irisan kerucut, misalnya elips pada gambar I.8 dalam sistem koordinat polar, tertuliskan sebagai

$$\frac{s}{r} = 1 + e \cos \theta$$

atau $su = 1 + e \cos\theta$ (34)

yang menghasilkan

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{s}$$

Irisan kerucut itu adalah elips apabila eksentrisitas e dalam persamaan (34) lebih kecil daripada 1 dan hiperbola bilamana e lebih besar daripada 1 serta parabola jikalau e = 1 dan lingkaran bilamana e = 0.
Untuk menyelidiki gerakannya lebih lanjut, kita berpaling ke persamaan (28), yakni persamaan gerak di dalam sistem koordinat polar.
Terlebih dahulu kita tuliskan tenaga potensialnya sebagai berikut

$$dV = - \underset{\sim}{F}.d\underset{\sim}{r}$$

Jadi

$$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \underset{\sim}{F}.d\underset{\sim}{r} = - \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{\underset{\sim}{r}}.d\underset{\sim}{r}$$

Dengan mengingat persamaan (36) persamaan ini lalu menjadi

$$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} - m \frac{a}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}}.d(r\hat{\underset{\sim}{r}})$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} m \frac{a}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}}.(rd\hat{\underset{\sim}{r}} + \hat{\underset{\sim}{r}}dr)$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} m \frac{a}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}}.(r\hat{\underset{\sim}{s}}d\theta + \hat{\underset{\sim}{r}}\, dr)$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} m \frac{a}{r^2}\, dr$$

$$= - ma \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Sebab $d\hat{\underset{\sim}{r}} = \hat{\underset{\sim}{s}}\, d\theta$ dan $\hat{\underset{\sim}{r}} . \hat{\underset{\sim}{s}} = 0$ sedangkan $\hat{\underset{\sim}{r}} . \hat{\underset{\sim}{r}} = 1$.
Akhirnya dengan mengatakan $V = 0$ di $r = \infty$, dan mengambil $r_2 = \infty$ serta $V_1 = V$ untuk $r_1 = r$ kita peroleh

$$V = - m \frac{a}{r}$$

sehingga persamaan (27) menjadi

$$d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2a}{r} - \frac{h^2}{r^2}}} \times \frac{h}{r^2}$$

yang dengan substitusi $u = \frac{1}{r}$ seperti di atas lalu memberikan

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = - \int_{u_o}^{u} \frac{h\, du}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2au - h^2u^2}}$$

Integral ini akan menghasilkan

$$\theta - \theta_o = - \left[\sin^{-1} \left\{ \frac{u - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \right\} - \sin^{-1} \left\{ \frac{u_o - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \right\} \right] \qquad (35)$$

Apabila untuk u_o diambil harga u diapses yakni yang memenuhi persamaan $\frac{du}{d\theta} = 0$, maka persamaan (29) memberikan

$$\frac{2E}{m} + \frac{2a}{r} - h^2u^2 = 0$$

atau $$\frac{2E}{m} + 2au - h^2u^2 = 0$$

yang menghasilkan

$$u_o = \frac{a}{h^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}$$

Di perihelion, untuk r_o nya diambil yang berharga kecil, yang dengan mengingat $u_o = 1/r_o$ berarti untuk u_o nya diambil yang berharga besar, yakni

$$u_o = \frac{a}{h^2} + \sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}} \qquad (36)$$

sedangkan di aphelion

$$u_o = \frac{a}{h^2} - \sqrt{\frac{a^2}{h^4} \quad \frac{2E}{mh^2}} \qquad (37)$$

Selanjutnya dengan mengambil $\Theta_o = 0$ untuk perihelion (perhatikan gambar I.8), persamaan (40) bersama persamaan (36) menghasilkan

$$\Theta = -\left[\sin^{-1} \left\{ \frac{u - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \right\} - \sin^{-1} 1 \right]$$

$$= -\left[\sin^{-1} \left\{ \frac{u - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \right\} - \frac{\pi}{2} \right]$$

atau $$\Theta + \frac{\pi}{2} = \sin^{-1} \left\{ \frac{u - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \right\}$$

yang lalu memberikan

$$\cos \Theta = \frac{u - \frac{a}{h^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}}$$

dan selanjutnya

$$\frac{h^2}{a} u = 1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{ma^2}} \cos \Theta \qquad (38)$$

Persamaan (38) ini tak lain ialah persamaan (34) dengan semilatus rectum

$$s = \frac{h^2}{a}$$

dan eksentrisitas

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{ma^2}} \qquad (39)$$

Dari persamaan (39) ini jelaslah bahwa lintasannya adalah eliptik apabila $E < 0$ yakni tenaga totalnya adalah negatif, hiperbolik bilamana $E > 0$, parabolik jika $E = 0$ dan lingkaran kalau

$$E = -\frac{ma^2}{2h^2}$$

Lebih lanjut dari hukum kekekalan tenaga mekanik

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + V(r)$$

$$= \tfrac{1}{2} mv^2 - m \frac{a}{r}$$

atau

$$v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2a}{r}$$

dan mengingat ketergantungan bentuk lintasan akan E di atas ternyatalah bahwa lintasan akan berbentuk

elips apabila $v^2 < \frac{2a}{r}$

hiperbola apabila $v^2 > \frac{2a}{r}$

parabola apabila $v^2 = \frac{2a}{r}$

Lintasan yang berbentuk hiperbola dan parabola, berarti titik materi tak kan kembali mengulangi lintasannya semula. Dengan perkataan lain, titik materi takkan kembali apabila kecepatannya cukup besar sedemikian hingga

$$v^2 > \frac{2a}{r}$$

Batas kecepatan di mana titik materi takkan kembali yakni yang diberikan oleh

$$v^2 = \frac{2a}{r} \quad \text{atau} \quad v = \sqrt{\frac{2a}{r}} \qquad (40)$$

disebut kecepatan hilang (escape velocity).
Kita uji sekarang kebenaran hukum-hukum Keppler.
Hukum-hukum itu adalah sebagai berikut

1^{o} Lintasan planet-planet sekeliling matahari, berbentuk elips dengan matahari di salah satu titik fokusnya.

2^{o} Luasan yang disapu oleh vektor radius planet terhadap matahari per satuan waktu adalah tetap.

3^{o} Kwadrat periode mengelilinginya matahari, (periode revolusi) sebanding dengan pangkat tiga jarak rata-rata planet dari matahari.

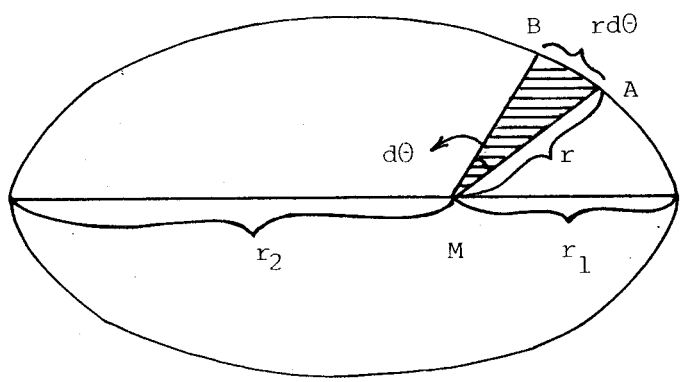
Menurut Newton, gaya tarik antara benda-benda angkasa berbanding lurus dengan massa masing-masing benda dan berbanding terbalik dengan kwadrat jarak antara kedua benda dan tetapan kesebandingan itu adalah universal, artinya sama untuk semua benda.
Secara matematis hukum Newton tentang gravitasi tersebut dapat dirumuskan sebagai

$$\underset{\sim}{F} = - G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\underset{\sim}{r}} \qquad (41)$$

$\hat{\underset{\sim}{r}}$ ialah satuan vektor sepanjang vektor koordinat satu benda terhadap yang lain; dan G ialah apa yang disebut tetapan gravitasi universal yang ternyata besarnya ialah

$$G = 6{,}67 \times 10^{-8} \text{ dyne cm}^2/\text{gram}^2$$

Dari persamaan (41) yang menyatakan bahwa gaya gravitasi itu adalah gaya sentral menuju ke pusat dan berbanding terbalik dengan kwadrat jarak, jelaslah bahwa menurut pembahasan di atas lintasan itu memang dapat berbentuk elips, sebagaimana hukum Keppler 1^{o} mengatakan.
Adapun hukum Keppler 2^{o} dapat dibuktikan dengan pertolongan gambar I.9. sebagai berikut



Gambar I.9.
Elemen luasan yang disapu vektor radius.

Dari gambar I.9 terlihat bahwa elemen luasan dL, yang disapu oleh vektor radius misalnya dari A ke B boleh dikatakan sama dengan luas Δ MAB dengan panjang AB kira-kira sebesar $rd\theta$. Dengan perkataan lain

$$dL \approx \tfrac{1}{2}\,(rd\theta)\ x\ r = \tfrac{1}{2}\,r^2 d\theta$$

Jadi luasan yang disapu oleh vektor radius per satuan waktu adalah

$$\frac{dL}{dt} \approx \tfrac{1}{2}\,r^2\ \frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}\,r^2\dot{\theta}$$

yang dengan mengingat persamaan (27) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dL}{dt} \approx \tfrac{1}{2}\,h$$

yakni tetap sebab h adalah tetap.
Akhirnya hukum Keppler 3^{o} akan terbuktikan dengan menerapkan persamaan (26) untuk menghitung periode revolusi planet.
Dari persamaan (36) dan (37) dengan mengingat $u = \frac{1}{r}$, kita peroleh jarak antara aphelion dan perihelion R misalnya, yakni

$$R = \frac{1}{\frac{a}{h^2} + \sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} + \frac{1}{\frac{a}{h^2} - \sqrt{\frac{a^2}{h^4} \quad \frac{2E}{mh^2}}}$$

$$= -\frac{ma}{E}$$

yang lalu memberikan tenaga total

$$E = -\frac{ma}{R} \tag{42}$$

Selanjutnya, di atas telah kita jabarkan bahwa tenaga potensialnya yang memenuhi persamaan (31) diberikan oleh

$$V = -\frac{a}{r} \tag{43}$$

Substitusi persamaan-persamaan (42) dan (43) ke persamaan (26) dengan batas integrasi dari perihelion ke perihelion lagi (lihat gambar I.9.) memberikan periode

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{-\frac{2a}{R} + \frac{2a}{r} - \frac{h^2}{r^2}}} \tag{44}$$

jika r_1 dan r_2 berturut-turut adalah harga r di perihelion dan di aphelion, yakni

$$r_1 = \frac{1}{\frac{a}{h^2} + \sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \qquad (45)$$

$$r_2 = \frac{1}{\frac{a}{h^2} - \sqrt{\frac{a^2}{h^4} + \frac{2E}{mh^2}}} \qquad (46)$$

Penyelesaian persamaan (44) dengan mengingat persamaan-persamaan (45) dan (46) akhirnya menghasilkan

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} (\tfrac{1}{2} R)^{3/2}$$

atau

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{a} \bar{r}^3 \qquad (47)$$

bila $\bar{r}$ yakni setengah jarak antara perihelion dan aphelion kita pandang sebagai jarak rata-rata antara planet dan matahari. Dari persamaan (47) terbuktikanlah hukum Keppler 3^{o} tersebut.

Adapun ketergantungan kecepatan planet akan jaraknya dari matahari, dengan mudah diperoleh dengan substitusi persamaan-persamaan (42) dan (43) ke persamaan hukum kekekalan tenaga mekanik.

$$E = K + V$$

yang lalu memberikan

$$-\frac{ma}{R} = \tfrac{1}{2} mv^2 - m\frac{a}{r}$$

yakni

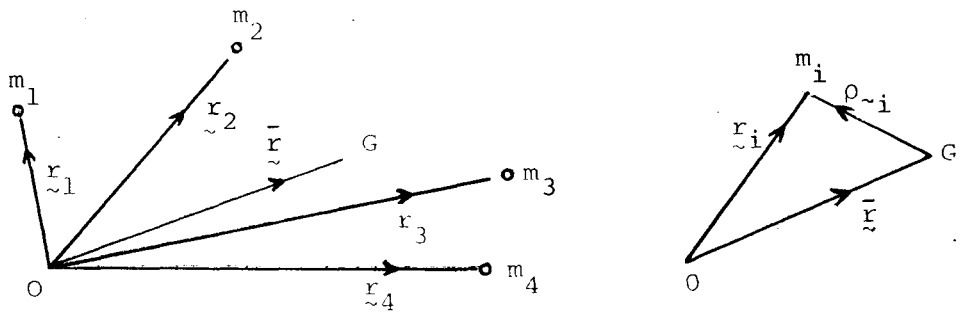
$$v = \sqrt{2a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} \qquad (48)$$

Dari persamaan (48) ini terlihat bahwa sewaktu planet berada lebih jauh dari matahari, yaitu sewaktu r besar, gerakannya lebih lambat.

II. MEKANIKA SISTEM MATERI

1. Titik Berat

Titik berat sistem materi adalah letak rata-rata kedudukan sistem materi tersebut. Untuk menjelaskan yang dimaksud, kita perhatikan himpunan titik-titik materi pada gambar II.1. di bawah ini.



Gambar II.1.
Definisi titik berat.

Rata-rata kedudukan titik-titik materi m_1, m_2, ... dan seterusnya dengan vektor-vektor kedudukan r_1, r_2 ..... dan seterusnya adalah

$$\bar{\underset{\sim}{r}} = \frac{m_1 \underset{\sim}{r}_1 + m_2 \underset{\sim}{r}_2 + m_3 \underset{\sim}{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

atau secara singkat

$$\bar{\underset{\sim}{r}} = \frac{\Sigma\, m_i \underset{\sim}{r}_i}{M} \qquad (49)$$

di mana M ialah massa total titik-titik materi.
Vektor ini adalah vektor titik berat G yang kita maksud.
Untuk sistem materi yang kontinyu persamaan (49) sudah tentu adalah

$$\bar{\underset{\sim}{r}} = \frac{\int \underset{\sim}{r}\, dm}{M} \qquad (50)$$

Lebih lanjut dengan menyatakan vektor kedudukan $\underset{\sim}{r}_i$ dalam hubungannya dengan vektor kedudukannya terhadap titik berat dan vektor kedudukan titik berat itu yakni dengan menuliskan

$$\underset{\sim}{r}_i = \bar{\underset{\sim}{r}} + \underset{\sim}{\rho}_i \qquad (51)$$

dari persamaan (49) kita peroleh

$$\Sigma\, m_i\, \underset{\sim}{\rho}_i = \underset{\sim}{0} \tag{52}$$

yang berarti bahwa rata-rata vektor kedudukan terhadap titik berat adalah nol.

2. Hukum Kekekalan Impuls

Impuls sistem materi didefinisikan sebagai jumlah impuls masing-masing titik materi; atau secara singkat

$$\underset{\sim}{L} = \Sigma \underset{\sim i}{1} = \Sigma m_i \dot{\underset{\sim i}{r}} \tag{53}$$

Dari persamaan (49) dengan mendiferensialkannya terhadap t, kita dapatkan

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \frac{\Sigma\, m_i \dot{\underset{\sim i}{r}}}{M}$$

atau

$$M\dot{\underset{\sim}{r}} = \Sigma\, m_i \dot{\underset{\sim i}{r}}$$

Maka menurut persamaan (53) kita peroleh

$$\underset{\sim}{L} = M\dot{\underset{\sim}{r}} \tag{54}$$

Jadi kita dapat mengatakan impuls sistem sama dengan impuls titik berat; yang dimaksud impuls titik berat adalah impuls titik massa yang seolah-olah berada di titik berat dengan massa sebesar massa total sistem dan bergerak menurutkan gerakan titik berat.

Selanjutnya gaya pada sistem materi didefinisikan sebagai jumlah gaya-gaya pada masing-masing titik materi; atau dirumuskan

$$\underset{\sim}{F} = \Sigma\, \underset{\sim i}{F} \tag{55}$$

Dengan mengingat hukum Newton

$$\underset{\sim}{F} = m\ddot{\underset{\sim}{r}}$$

dan mengingat persamaan (49) kita peroleh

$$\underset{\sim}{F} = M\ddot{\underset{\sim}{r}} \tag{56}$$

yang berarti gaya pada sistem sama dengan gaya terhadap titik berat, maksudnya sama dengan gaya yang seolah-olah bekerja pada suatu titik massa yang berada di titik berat dengan massa sebesar massa total sistem serta bergerak menurutkan gerakan titik berat.
Perlu kita perhatikan bahwa gaya yang bekerja pada masing-masing titik materi dapat terdiri atas gaya dalam maupun gaya luar; yang dimaksud dengan gaya dalam ialah gaya interaksi antara titik-titik materi satu sama lain.
Dengan perkataan lain kita dapat menuliskan

$$\underset{\sim i}{F} = \underset{\sim i}{F}^{(1)} + \underset{\sim i}{F}^{(d)} \tag{57}$$

atau

$$\underset{\sim}{F}_i = \underset{\sim}{F}_i^{(1)} + \Sigma_j \underset{\sim}{F}_{ij} \qquad (57)$$

di mana $\underset{\sim}{F}_{ij}$ adalah gaya oleh m_j terhadap m_i.

Tetapi menurut hukum Newton ke III, reaksi sama dengan aksi,

$$\underset{\sim}{F}_{ij} = - \underset{\sim}{F}_{ji}$$

sehingga

$$\sum_j \sum_j \underset{\sim}{F}_{ij} = 0$$

yang dari persamaan (57) berarti

$$F = \Sigma F_i = \Sigma F_i^{(1)} \qquad (58)$$

Jadi gaya pada sistem materi sama dengan jumlah gaya-gaya luar pada titik-titik materi.

Dari persamaan-persamaan (58), (56), dan (49) terlihatlah bahwa apabila tiada gaya luar yang bekerja pada sistem materi, maka

$$\Sigma m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i = \underset{\sim}{0}$$

yang berarti

$$\Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i = \text{tetap} \qquad (59)$$

yakni jumlah impuls titik-titik materi adalah tetap terhadap waktu. Pernyataan ini disebut hukum kekekalan impuls. Hukum ini sangat bermanfaat dalam analisa tumbukan antara titik-titik materi.

3. Tenaga Kinetik Sistem Materi

Yang dimaksud dengan tenaga kinetik sistem materi ialah jumlah tenaga-tenaga kinetik masing-masing titik materi.

Atau kalau dirumuskan :

$$K = \Sigma_i K_i = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i \qquad (60)$$

Seperti pada pembahasan-pembahasan di atas, kita hendak menyatakan tenaga kinetik itu dalam hubungannya dengan tenaga kinetik titik berat. Untuk itu vektor kedudukan masing-masing titik materi akan kita nyata - kan dalam hubungannya dengan vektor kedudukan titik berat. Kita perhatikan lagi gambar II.1 di atas.

$$\Sigma (\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i) = \Sigma \left\{ (\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) \cdot (\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) \right\}$$

$$\Sigma m_i (\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i) = \Sigma m_i (\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) \cdot (\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i)$$

$$= M \dot{\bar{r}}^2 + \Sigma m_i \dot{\rho}_i^2 + 2 \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} \cdot \Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i$$

Tetapi menurut persamaan (52)

$$\Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \underset{\sim}{\rho}_i = \underset{\sim}{0}$$

sehingga dari persamaan (60)

$$K = \tfrac{1}{2} M\dot{\bar{r}}^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \dot{\rho}_i^2 = K_G + \Sigma K_i^{(G)} \qquad (61)$$

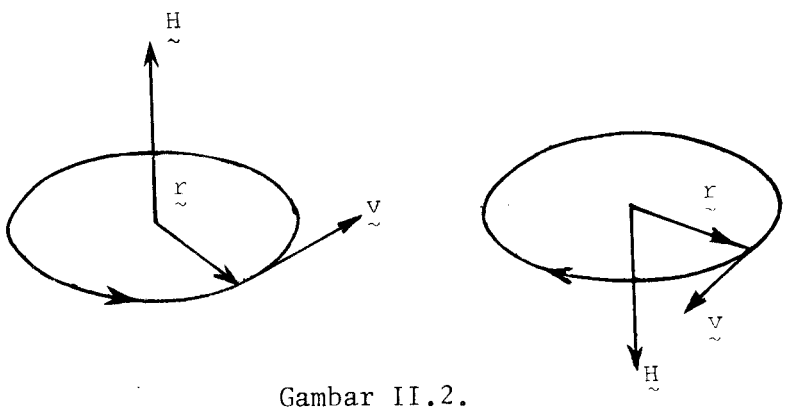
Dengan perkataan lain, tenaga kinetik sistem materi sama dengan jumlah tenaga kinetik titik berat dan tenaga kinetik masing-masing titik materi terhadap titik berat.

4. Impuls Putar Sistem Materi

Impuls putar yaitu momen daripada impuls didefinisikan sebagai

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{r} \times m\dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{r} \times m\underset{\sim}{v} \qquad (62)$$

Jadi impuls putar yang memberi ukuran besar impuls perputaran itu dinyatakan oleh vektor perputaran yang tegak lurus bidang lintasan. Adapun arahnya adalah pada arah bergerak maju-mundurnya sekrup kalau perputaran sekrup itu mengikuti perputaran gerakan. Untuk jelasnya lihat gambar II.2. di bawah ini.



Gambar II.2.
Vektor impuls putar

Impuls putar sistem materi didefinisikan sebagai jumlah impuls-impuls putar masing-masing titik materi; atau kalau dirumuskan

$$\underset{\sim}{H} = \Sigma \underset{\sim i}{H} = \Sigma \underset{\sim i}{r} \times m_i \underset{\sim i}{v} \qquad (63)$$

Dari persamaan (51), persamaan (63) menjadi

$$\underset{\sim}{H} = \Sigma (\underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{\rho}_i) \times m_i (\dot{\underset{\sim}{r}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i)$$

$$= \underset{\sim}{\bar{r}} \times \Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{r}} + \bar{r} \times \Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i + \Sigma \underset{\sim}{\rho}_i \times m_i \dot{\underset{\sim}{r}}$$

$$+ \Sigma \underset{\sim}{\rho}_i \times m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i \qquad (64)$$

Suku pertama ruas kanan dapat dituliskan sebagai

$$\underset{\sim}{\bar{r}} \times \underset{\sim}{\dot{\bar{r}}} \Sigma m_i = \underset{\sim}{\bar{r}} \times \underset{\sim}{\dot{\bar{r}}} M = \underset{\sim}{\bar{r}} \times M \underset{\sim}{\dot{\bar{r}}}$$

Suku kedua ruas kanan adalah nol sebab dari persamaan (52)

$$\Sigma m_i \underset{\sim}{\dot{\rho}}_i = \underset{\sim}{0}$$

Sedangkan suku ketiga ruas kanan adalah

$$\Sigma \underset{\sim}{\rho}_i \times m_i \underset{\sim}{\dot{\bar{r}}} = - \underset{\sim}{\bar{r}} \times \Sigma m_i \underset{\sim}{\rho}_i = 0$$

dengan mengingat persamaan (52)

Dengan demikian persamaan (64) menjadi

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{\bar{r}} \times M \underset{\sim}{\dot{\bar{r}}} + \Sigma \underset{\sim}{\rho}_i \times m_i \underset{\sim}{\dot{\rho}}_i$$

atau

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_G + \Sigma \underset{\sim}{H}_i^{(G)} \qquad (65)$$

Persamaan (65) ini mengatakan bahwa impuls putar sistem materi sama dengan impuls putar titik berat (H_G) ditambah jumlah impuls - impuls putar masing-masing titik materi terhadap titik berat ($H_i^{(G)}$). Impuls putar titik berat ialah impuls putar suatu titik materi yang seolah-olah ada di titik berat yang massanya sama dengan jumlah massa masing-masing titik materi.

Kita tinjau sekarang keadaan khusus di mana suatu titik materi berputar sekeliling pusat sistem koordinat dengan jarak titik materi ke pusat yang tetap.
Untuk gerakan demikian, besar kecepatannya adalah

$$v = \omega r \qquad (66)$$

Selanjutnya dengan mengingat definisi vektor kecepatan sudut $\underset{\sim}{\omega}$ di bab I, pasal 2, persamaan (63) dan persamaan (66) menghasilkan

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{H} &= \Sigma \underset{\sim}{r}_i \times m_i \underset{\sim}{v}_i \\
&= \Sigma r_i \underset{\sim}{\hat{r}} \times m \omega r_i \underset{\sim}{\hat{s}} \\
&= \left(\Sigma m_i r_i^2 \right) \omega \hat{r} \times \hat{s} \\
&= \left(\Sigma m_i r_i^2 \right) \underset{\sim}{\omega}
\end{aligned}$$

atau

$$\underset{\sim}{H} = I \underset{\sim}{\omega} \qquad (67)$$

di mana $I = \Sigma m_i r_i^2$ adalah apa yang disebut momen enersia sistem materi. Untuk sistem materi yang kontinyu, sudah tentu

$$I = \int r^2 dm \qquad (68)$$

Kalau persamaan (67) di atas kita bandingkan dengan persamaan (54) maka I bersesuaian dengan massa sebagaimana impuls putar H bersesuaian dengan impuls $\underset{\sim}{L}$ dan kecepatan sudut $\underset{\sim}{\omega}$ bersesuaian dengan kecepatan linier $\underset{\sim}{v}$.

Adapun tenaga kinetik perputaran sistem materi yang hanya berputar sekeliling pusat seperti di atas, diberikan oleh

$$K = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \Sigma \tfrac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$$

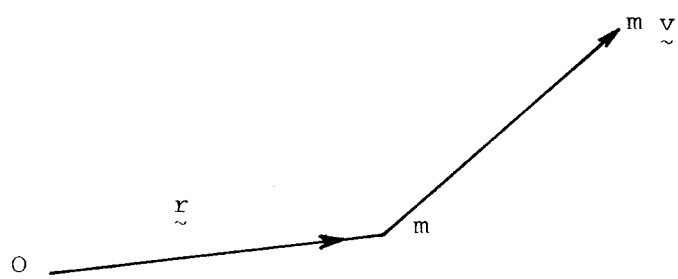
$$= \tfrac{1}{2} (\Sigma m_i r_i^2) \omega^2$$

atau $$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (69)$$

yang bersesuaian dengan tenaga kinetik gerakan linier $K = \tfrac{1}{2} Mv^2$.

5. Momen Gaya Sistem Materi

Bersesuaian dengan hukum Newton II, $\underset{\sim}{F} = \frac{d}{dt} (m\underset{\sim}{v}) = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{L}$ kita hendak meneliti apakah yang memberikan $\frac{d}{dt} \underset{\sim}{H}$.
Untuk itu kita perhatikan gambar II.3 di bawah ini.



Gambar II.3.
Impuls putar dan momen gaya.

Kita mempunyai

$$\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underset{\sim}{r} \times m\underset{\sim}{v})$$

$$= \underset{\sim}{r} \times \frac{d}{dt} (m\underset{\sim}{v}) + \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} \times m\underset{\sim}{v}$$

$$= \underset{\sim}{r} \times \frac{d}{dt} (m\underset{\sim}{v}) + \underset{\sim}{v} \times m\underset{\sim}{v}$$

$$= \underset{\sim}{r} \times \frac{d}{dt} (m\underset{\sim}{v})$$

$$= \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}$$

sebab $\underset{\sim}{v} \times m\underset{\sim}{v} = m\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$

Jadi yang memberikan perubahan impuls putar terhadap waktu ialah momen gaya $\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}$.

Dengan demikian, analoog dengan hukum Newton ke II, untuk gerakan putaran berlaku hubungan

$$\underset{\sim}{\tau} = \frac{d\underset{\sim}{H}}{dt} \qquad (70)$$

Adapun momen gaya sistem materi sewajarnyalah didefinisikan sebagai jumlah momen gaya masing-masing titik materi, yakni

$$\underset{\sim}{\tau} = \Sigma \underset{\sim}{\tau}_i$$

sehingga kita peroleh

$$\underset{\sim}{\tau} = \Sigma \frac{d\underset{\sim}{H}_i}{dt}$$

$$= \Sigma \underset{\sim}{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \underset{\sim}{r}_i)$$

yang dengan mengingat persamaan (51) menjadi

$$\underset{\sim}{\tau} = (\underset{\sim}{\bar{r}} + \underset{\sim}{\rho}_i) \times \frac{d}{dt} m_i (\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i)$$

$$= \bar{r} \times M\dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \Sigma \frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) + \Sigma \left\{ \underset{\sim}{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}}) \right\} +$$

$$\Sigma \left\{ \underset{\sim}{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) \right\} \qquad (71)$$

Akan tetapi, menurut persamaan (52), suku kedua ruas kanan sama dengan nol sebab $\frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) = 0$.

Lebih lanjut menurut persamaan (52) pula, suku ketiga ruas kanan

$$\underset{\sim}{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}}) = - \dot{\bar{r}} \times \frac{d}{dt} (m_i \underset{\sim}{\rho}_i) = \underset{\sim}{0}$$

Dengan demikian, akhirnya kita tulis

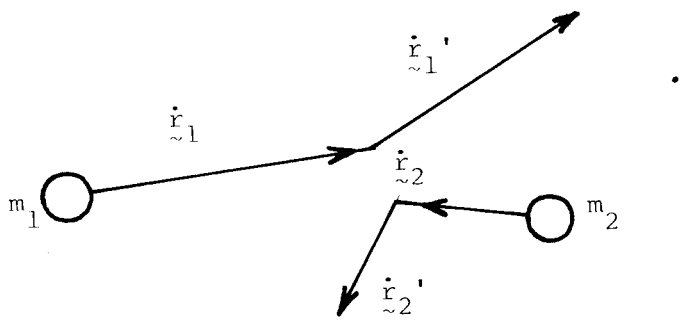
$$\underset{\sim}{\tau} = \bar{r} \times M\dot{\bar{r}} + \Sigma \left\{ \underset{\sim}{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\underset{\sim}{\rho}}_i) \right\}$$

atau $$\underset{\sim}{\tau} = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{H}_G + \frac{d}{dt} \underset{\sim}{H}_i^{(G)} \qquad (72)$$

Dengan kata lain, momen gaya sama dengan perubahan impuls putar titik berat per satuan waktu ditambah jumlah perubahan impuls-impuls putar per satuan waktu masing-masing titik materi, terhadap titik berat.

6. Tumbukan

Gejala tumbukan ialah yang mana tidak ada gaya luar ataupun resultante gaya luar adalah nol.
Kalau ada gaya pada titik-titik materi maka gaya itu hanyalah gaya interaksi yakni gaya dalam saja.
Pertama-tama hendak kita pelajari tumbukan tanpa gaya dalam, misalnya tumbukan antar kelereng, antara bola-bola bilyard, dan lain sebagainya.
Kita perhatikan gambar II.4 di bawah ini.



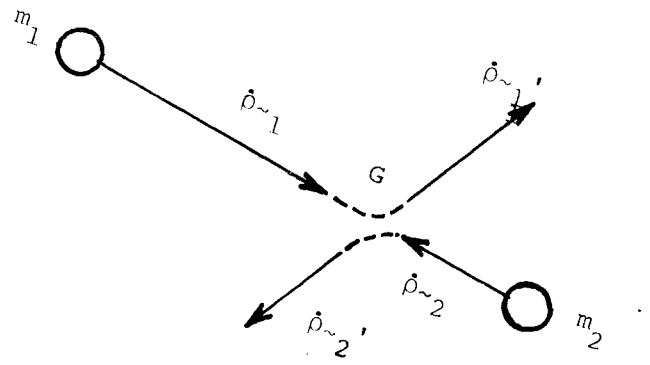
Gambar II.4.
Perubahan kecepatan sewaktu tumbukan.

Misalkan $\dot{r}_1$ dan $\dot{r}_2$ ialah kecepatan titik-titik materi bersama m_1 dan m_2 sebelum tumbukan sedangkan $\dot{r}_1'$ dan $\dot{r}_1'$ adalah kecepatan mereka sesudah tumbukan.
Dari persamaan (52) dengan mendiferensialkannya ke t, kita peroleh

$$m_1 \dot{\rho}_1 + m_2 \dot{\rho}_2 = 0 \text{ atau } m_1 \dot{\rho}_1 = - m_2 \dot{\rho}_2 \qquad (73)$$

$$m_1 \dot{\rho}_1' + m_2 \dot{\rho}_2' = 0 \text{ atau } m_1 \dot{\rho}_1' = - m_2 \dot{\rho}_2' \qquad (74)$$

di mana persamaan (73) adalah untuk yang sebelum tumbukan dan persamaan (74) adalah untuk yang sesudah tumbukan.
Persamaan (73) memperlihatkan bahwa dilihat dari titik berat, m_1 dan m_2 saling bertumbukan berhadapan, sedangkan persamaan (74) menunjukkan bahwa dilihat dari titik berat kedua titik materi itu terpelanting dengan arah yang berlawanan. Untuk jelasnya kita perhatikan gambar II.5. di bawah ini.



Gambar II.5.
Tumbukan dilihat dari titik berat.

Kecuali itu, dilihat dari titik berat, titik materi yang lebih berat, bergerak lebih lambat.
Selanjutnya dengan memperhatikan harganya saja, persamaan-persamaan (73) dan (74) memberikan

$$m_1 \dot{\rho}_1 = m_2 \dot{\rho}_2 \tag{75}$$

$$m_1 \dot{\rho}_1' = m_2 \dot{\rho}_2' \tag{76}$$

di mana $\dot{\rho}_1$, $\dot{\rho}_2$, $\dot{\rho}_1'$, dan $\dot{\rho}_2'$ adalah besaran-besaran berharga positif. Kemudian dari persamaan (56) kita peroleh

$$M\dot{\underset{\sim}{r}} = \text{tetap}$$

sebab tiada gaya luar, yakni F = 0.
Dengan demikian, dengan mengingat hukum kekekalan tenaga, di mana dalam hal tumbukan di atas, tenaganya hanya tenaga kinetik saja, persamaan (61) menjadi

$$\tfrac{1}{2}m_1 \dot{\rho}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\rho}_2^{\,2} = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}_1')^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{\rho}_2')^2$$

yang lalu menghasilkan

$$m_1 (\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_1')(\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_1') = -m_2 (\dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2')(\dot{\rho}_2 - \dot{\rho}_2') \tag{77}$$

Adapaun persamaan (75) dan persamaan (76) dengan menjumlahkan dan mengurangkan keduanya, memberikan

$$m_1 (\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_1') = m_2 (\dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2') \tag{78}$$

$$m_1 (\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_1') = m_2 (\dot{\rho}_2 - \dot{\rho}_2') \tag{79}$$

Akhirnya persamaan (77) dan persamaan (78) menghasilkan

$$\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_1' = -(\dot{\rho}_2 - \dot{\rho}_2')$$

atau

$$\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_1' + \dot{\rho}_2' \tag{80}$$

sedangkan persamaan (77) dan persamaan (79) menghasilkan

$$\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_1' = -(\dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2') \tag{81}$$

Persamaan (80) mengatakan bahwa kecepatan relatif (yakni kecepatan m_1 dilihat dari m_2 ataupun kecepatan m_2 dilihat dari m_1) adalah tetap artinya sesudah tumbukan sama dengan sebelum tumbukan.
Sedangkan persamaan (81) tidak cocok dengan kenyataan, sebab $\dot{\rho}_1$, $\dot{\rho}_2$, $\dot{\rho}_1'$ dan $\dot{\rho}_2'$ semuanya harus berharga positif.
Lebih lanjut, dari persamaan (75) dan (76) kita dapatkan

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\dot{\rho}_1'} = \frac{\dot{\rho}_2}{\dot{\rho}_2'} \quad \text{atau} \quad \frac{\dot{\rho}_1}{\dot{\rho}_2} = \frac{\dot{\rho}_1'}{\dot{\rho}_2'}$$

yang berarti

$$\frac{\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2}{\dot{\rho}_2} = \frac{\dot{\rho}_1' + \dot{\rho}_2'}{\dot{\rho}_2'} \quad \text{dan} \quad \frac{\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2}{\dot{\rho}_1} = \frac{\dot{\rho}_1' + \dot{\rho}_2'}{\dot{\rho}_1'}$$

Dengan mengingat persamaan (80), persamaan-persamaan di atas akan menghasilkan

$$\dot{\rho}_2' = \dot{\rho}_2 \quad \text{dan} \quad \dot{\rho}_1' = \dot{\rho}_1$$

Jadi dilihat dari titik berat G, besar kecepatan masing-masing titik materi tidak berubah sewaktu tumbukan, dan hanya arahnya saja yang berubah.

Tumbukan di mana hukum kekekalan tenaga mekanik dipenuhi, disebut tumbukan elastis, sedang sebaliknya disebut tumbukan non elastis.
Dalam alam, tumbukan yang benar-benar elastis tidak ada. Tidak elastisnya tumbukan, disebabkan oleh desipasi tenaga menjadi panas atau boleh jadi menjadi tenaga deformasi (lekukan dan lain sebagainya) dari pada benda-benda yang bertumbukan.
Tidak elastisnya tumbukan menyebabkan tenaga kinetik total sesudah tumbukan, lebih kecil daripada tenaga kinetik total sebelum tumbukan, sehingga persamaan (80) menjadi

$$\dot{\rho}_1' + \dot{\rho}_2' < \dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2$$

Besaran

$$e = \frac{\dot{\rho}_1' + \dot{\rho}_2'}{\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2} \tag{82}$$

memberikan ukuran ketidak elastisan tumbukan dan disebut koefisien restitusi.
Jelaslah bahwa

$$0 \leqslant e \leqslant 1$$

Dengan definisi e tersebut dipersamaan (82), merosostnya tenaga mekanik total sesudah tumbukan yakni

$$E = \left\{ \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{\rho}_2)^2 \right\} - \left\{ \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}_1')^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{\rho}_2')^2 \right\} \qquad (83)$$

sudah tentu dapat dinyatakan dalam hubungannya dengan koefisien resti - tusi e.
Kemorosotan tenaga dibandingkan dengan tenaga mula-mula, diberikan oleh

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\left\{ \tfrac{1}{2} m_1 \dot{\rho}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\rho}_2^2 \right\} - \left\{ \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}_1')^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{\rho}_2')^2 \right\}}{\tfrac{1}{2} m_1 \dot{\rho}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\rho}_2^2} \qquad (84)$$

Dalam tumbukan, meskipun tenaga mekanik total dapat merosot, hukum kekekalan impuls tetap berlaku.
Maka dari persamaan (75) dan persamaan (76) koefisien resititusi dapat pula ditulis sebagai

$$e = \frac{\frac{m_2}{m_1} \dot{\rho}_2' + \dot{\rho}_2'}{\frac{m_2}{m_1} \dot{\rho}_2 + \dot{\rho}_2} = \frac{(\frac{m_2}{m_1} + 1) \dot{\rho}_2'}{(\frac{m_2}{m_1} + 1) \dot{\rho}_2} = \frac{\dot{\rho}_2'}{\dot{\rho}_2} \qquad (85)$$

atau

$$e = \frac{\dot{\rho}_1' + \frac{m_1}{m_2} \dot{\rho}_1'}{\dot{\rho}_1 + \frac{m_1}{m_2} \dot{\rho}_1} = \frac{(1 + \frac{m_1}{m_2}) \dot{\rho}_1'}{(1 + \frac{m_1}{m_2}) \dot{\rho}_1} = \frac{\dot{\rho}_1'}{\dot{\rho}_1} \qquad (86)$$

Dari kedua persamaan di atas, jelaslah bahwa apabila e = 1, yaitu tumbukannya elastis sempurna, maka $\dot{\rho}_2' = \dot{\rho}_2$ dan $\dot{\rho}_1' = \dot{\rho}_1$ sebagaimana telah dikemukakan sebelumnya.

Selanjutnya, penghitungan persamaan (84) lebih lanjut dengan menerap - kan persamaan-persamaan (75) dan (76) menghasilkan

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{\dfrac{(m_1\ \rho_1')^2}{m_1} + \dfrac{(m_2\ \rho_2')^2}{m_2}}{\dfrac{(m_1\ \dot{\rho}_1)^2}{m_1} + \dfrac{(m_2\ \dot{\rho}_2)^2}{m_2}}$$

$$= 1 - \frac{(m_2\ \dot{\rho}_2')^2\ (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})}{(m_2\ \dot{\rho}_2)^2\ (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})}$$

$$= 1 - \left(\frac{\dot{\rho}_2'}{\dot{\rho}_2}\right)^2$$

sehingga dengan mengingat persamaan (85) kita dapatkan

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^2 \qquad (87)$$

Dari persamaan (87), jelas bahwa untuk tumbukan yang elastis, e = 1 sehingga $\Delta E = 0$; hal ini cocok dengan kenyataan.
Keadaan extreem lain ialah untuk tumbukan yang mutlak non elastis. Dalam keadaan ini, e = 0 sehingga $\Delta E = E$, yang berarti seluruh tenaga mekaniknya hilang sesudah tumbukan. Untuk keadaan yang demikian, menurut persamaan (82), kecepatan relatif sesudah tumbukan adalah nol; hal ini berarti kedua titik materi itu sesudah tumbukan, melekat satu sama lain.

7. Hamburan

Hamburan adalah semacam tumbukan. Kalau dalam tumbukan yang kita bicarakan di pasal 6 di atas, kedua titik materi itu saling tidak mengenakan gaya, artinya tidak ada interaksi, yakni tidak ada gaya dalam, maka dalam hamburan yang kita bicarakan di pasal ini, justru kita hendak membahas sifat gerakan akibat interaksi dua titik materi.
Secara khusus kita pelajari hamburan oleh gaya sentral, yakni gaya terhadap satu titik materi oleh titik materi lain. Arah gaya interaksi itu adalah sepanjang garis penghubung kedua titik materi tersebut, sedang besar gaya itu hanya tergantung pada jarak antara kedua titik materi itu. Lebih khusus lagi, kita akan meninjau hamburan dengan gaya Coulomb yang tolak menolak. Jadi untuk masalah ini, persamaan (31) di bab I pasal 5 menjadi berbentuk

$$\ddot{\underset{\sim}{r}} = \frac{a}{r^2}\,\hat{\underset{\sim}{r}} \qquad (88)$$

dengan $a>0$.

Selanjutnya dengan mengikuti pembahasan di bab I pasal 5 tentang hukum Keppler, kita peroleh rumus-rumus yang sebentuk, yakni dengan mengganti kan a setiap kali dengan -a.
Demikianlah maka akan kita peroleh

$$V = + m \frac{a}{r}$$

dan

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + m \frac{a}{r} \qquad (89)$$

sehingga pastilah $E > 0$. Ini berarti bahwa lintasan satu titik materi terhadap yang lain adalah hiperbolik. Dari persamaan (34), dengan menuliskan

$$s = \frac{h^2}{-a} = - \frac{h^2}{a}$$

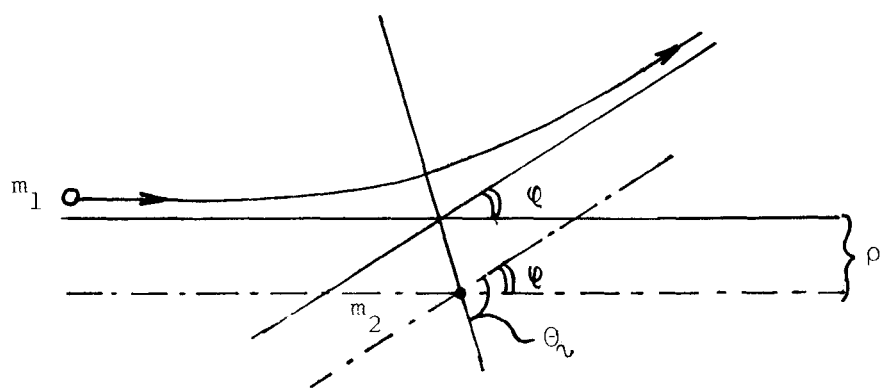
kita dapatkan

$$u = - \frac{a}{h^2} (1 + e \cos \Theta)$$

atau

$$\frac{1}{r} = - \frac{a}{h^2} (1 + e \cos \Theta) \qquad (90)$$

Kita perhatikan gambar II.6. berikut ini.



Gambar II.6.
Hubungan antara sudut hambur dan eksentrisitas.

Menurut geometri, hubungan antara r dan θ untuk hiperbola yang diberikan oleh persamaan (90) adalah seperti yang tertera pada gambar II.6. di atas.
Arah asimptot, diberikan oleh $\theta = \theta_{\infty}$ untuk $r = \infty$, yakni $\frac{1}{r} = 0$. Jadi menurut persamaan (90)

$$0 = - \frac{a}{h^2} (1 + e \cos \theta_{\infty})$$

yang berarti

$$\cos \theta_{\infty} = - \frac{1}{e} \qquad (91)$$

di mana e diberikan oleh persamaan (39) di bab I pasal 5.
Seandainya antara kedua titik materi m_1 dan m_2 itu tidak ada gaya interaksi, maka m_1 yang datang dari $r = -\infty$ tidak akan melintasi lintasan hiperbolik melainkan sepanjang garis asimptot yang berjarak p dari m_2.
Besaran p ini disebut parameter benturan (impact parameter). Selanjutnya, karena tidak ada gaya luar, maka impuls total maupun impuls putar total adalah tetap.
Untuk sementara kita tinjau keadaan di mana m_2 dipandang tetap di tempatnya sedang m_1 ditembakkan ke arah m_2 dan lalu mengalami pembelokan oleh gaya interaksi tolak menolak dengan m_2.
Karenanya, kita dapat meninjau impuls putar m_1 terhadap m_2 selaku impuls putar yang kita pandang tetap itu.
Sewaktu di $r = -\infty$, impuls putar itu diberikan oleh

$$H = p \times m_1 v_{-\infty}$$

di mana $v_{-\infty}$ adalah kecepatan m_1 yakni v_1, di $r = -\infty$. Tetapi menurut persamaan (22), impuls putar itu adalah sebesar

$$p \times m_1 v_{-\infty} = m_1 h$$

atau

$$p = \frac{h}{v_{-\infty}}$$

Adapun $v_{-\infty}$ dapat diperoleh dari persamaan (89) dengan memasukkan $r = -\infty$ di persamaan tersebut. Ini menghasilkan

$$E = \tfrac{1}{2} m_1 v_{-\infty}^2$$

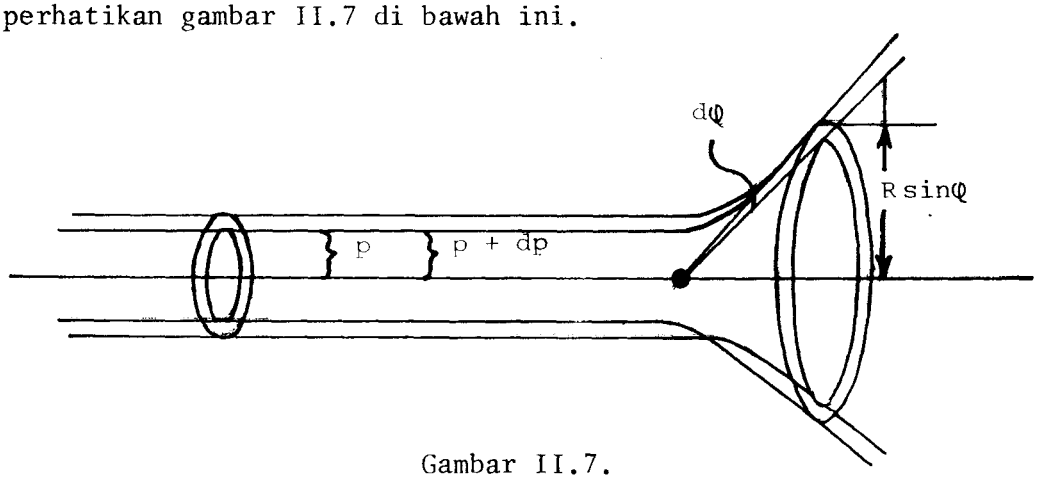
atau

$$v_{-\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m_1}}$$

Jadi kita dapatkan

$$p = \frac{h}{\sqrt{\frac{2E}{m_1}}} \qquad (92)$$

Dalam Fisikan Atom dan Fisika Nuklir banyak dibicarakan gejala hamburan, di mana dibahas derajat kemungkinan hamburan pada berbagai - bagai arah hamburan.
Derajat kemungkinan tersebut dinyatakan dengan apa yang disebut tampang lintang diferensial (differential cross section).
Kita perhatikan gambar II.7 di bawah ini.



Gambar II.7.
Keterangan tampang lintang diferensial.

Kita tinjau titik-titik materi bermassa m_1, dihamburkan oleh titik materi bermassa m_2 yang kita pandang tetap letaknya; untuk $m_2 >> m_1$ hal ini memang sesuai dengan kenyataan.
Untuk titik materi m_1 yang lebih dekat sumbu, yakni yang parameter benturan p-nya lebih kecil, tentunya akan lebih dihamburkan, yaitu terhambur dengan sudut hambur φ yang lebih besar. Sebaliknya yang sangat jauh dari sumbu, boleh dikatakan tidak terhambur.
Kita hendak meneliti dari titik-titik materi dengan berbagai-bagai parameter benturan itu berapa bagian yang terhambur dengan sudut hambur φ tertentu.
Misalkan yang terhambur ke dalam sudut ruang $d\Omega$ dengan sudut hambur antara φ dan $\varphi + d\varphi$ itu adalah yang parameter benturannya berharga antara p dan p + dp tertentu. Apabila banyaknya titik materi m_1 yang ditembakkan per satuan waktu per satuan luas penampang yakni yang disebut intensitas atau rapat flux, ialah I, maka banyaknya titik materi m_1 yang dihamburkan ke arah φ di dalam sudut ruang $d\Omega$ adalah

$$d\phi = 2\pi \; pdp \times I$$

di mana $2\pi pdp$ ialah luas elemen luasan berbentuk cincin yang dibatasi oleh jari-jari p dan p + dp.
Jadi banyaknya titik materi per satuan rapat flux yang dihamburkan pada arah φ per satuan sudut ruang, diberikan oleh

$$\sigma(\varphi) = \frac{d\phi/I}{d\Omega} = \frac{2\pi pdp}{d\Omega} \tag{93}$$

Besaran ini sudah tentu tergantung pada, yakni merupakan fungsi daripada sudut hambur φ; besaran tersebut dinamakan tampang lintang diferensial. Selanjutnya, dengan memperhatikan gambar II.7 sudut ruang $d\Omega$ diberikan oleh

$$d\Omega = \frac{(2\pi R \sin\varphi) \cdot R\, d\varphi}{R^2}$$

$$= 2\pi \sin\varphi\, d\varphi \tag{94}$$

Dengan demikian persamaan (93) menjadi

$$\sigma(\varphi) = \frac{2\pi pdp}{2\pi \sin\varphi\, d\varphi}$$

$$= \frac{pdp}{\sin\varphi\, d\varphi}$$

Oleh karena makin besar p makin kecil φ, yang berarti $\frac{dp}{d\varphi} < 0$, maka agar $\sigma(\varphi)$ berharga positif, kita tuliskan

$$\sigma(\varphi) = -\frac{pdp}{\sin\varphi\, d\varphi}$$

atau $$\sigma(\varphi) = \frac{d(\frac{1}{2}p^2)}{d\cos\varphi} \tag{95}$$

Lebih lanjut, dari persamaan (92)

$$d(\tfrac{1}{2}p^2) = \frac{d(\frac{1}{2}h^2)}{2E / m_1}$$

$$= -\frac{m_1 h^2}{4E^2}\, dE \tag{96}$$

Sedangkan φ, yaitu sudut antara arah datang dengan arah terhambur, dengan pertolongan gambar II.6., diberikan oleh

$$\varphi = \pi - 2\,(\pi - \theta_{cs})$$

$$= 2\theta_{cs} - \pi$$

sehingga $\quad d\cos\varphi = d\,(\cos 2\theta_{cs})$

$$= d\,(2\cos^2\theta_{cs} - 1)$$

$$= 2\,d\cos^2\theta_{cs}$$

yang dengan mengingat persamaan (91) dan persamaan (39) menjadi

$$d\cos\varphi = 2\,d\left[\frac{1}{1 + \frac{2Eh^2}{m_1 a^2}}\right]$$

$$= -2.\frac{1}{\left(1 + \frac{2Eh^2}{m_1 a^2}\right)^2} \cdot \frac{2h^2}{m_1 a^2}\,dE \qquad (98)$$

Akhirnya, persamaan-persamaan (95), (96), dan (98) menghasilkan

$$\sigma(\varphi) = \frac{m_1^2 h^2}{4E^2} \cdot \frac{\left[1 + \frac{2Eh^2}{m_1 a^2}\right]^2 m_1 a^2}{4h^2}$$

$$= \frac{m_1^2 a^2}{16E^2} \cdot \left[1 + \frac{2Eh^2}{m_1 a^2}\right]^2$$

yang dengan lagi mengingat persamaan (91) dan persamaan (39) menjadi

$$\sigma(\varphi) = \frac{m_1 a^2}{16E^2} \times \frac{1}{\cos^4\theta_{cs}} \qquad (99)$$

Untuk menyatakan $\sigma(\varphi)$ sebagai fungsi sudut hambur φ, kita ingat hubungan antara φ dengan θ_{cs} yang diberikan oleh persamaan (97), yang menghasilkan

$$\cos \theta_{cm} = \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \pi)$$

$$= \cos (\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\pi)$$

$$= - \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

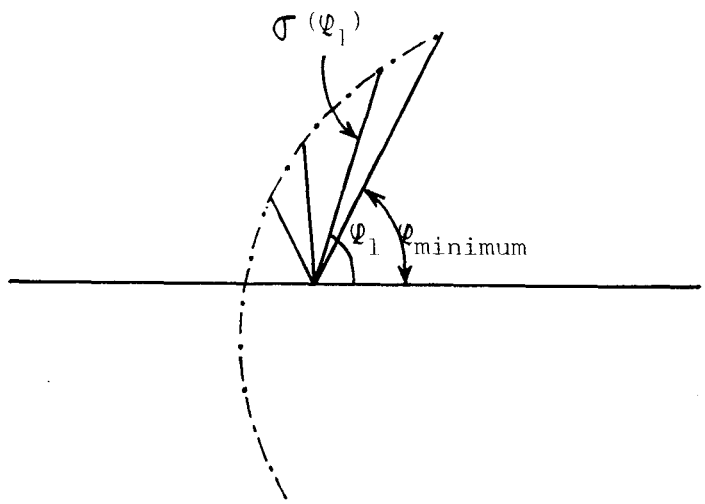
sehingga akhirnya kita peroleh rumus hamburan Rutherford

$$\sigma(\varphi) = \frac{m_1 a^2}{16E^2} \times \frac{1}{\sin^4 \tfrac{1}{2}\varphi} \qquad (100)$$

atau

$$\sigma(\varphi) = \frac{m_1^2 a^2}{16E^2} \operatorname{cosec}^4 \tfrac{1}{2}\varphi \qquad (101)$$

Ketergantungan tampang lintang diferensial σ akan sudut hambur φ, kiranya dapat dinyatakan dengan diagram gambar II.8 di bawah ini, di mana panjang anak panah menggambarkan besarnya σ pada arah φ yang diberikan oleh arah anak panah tersebut.

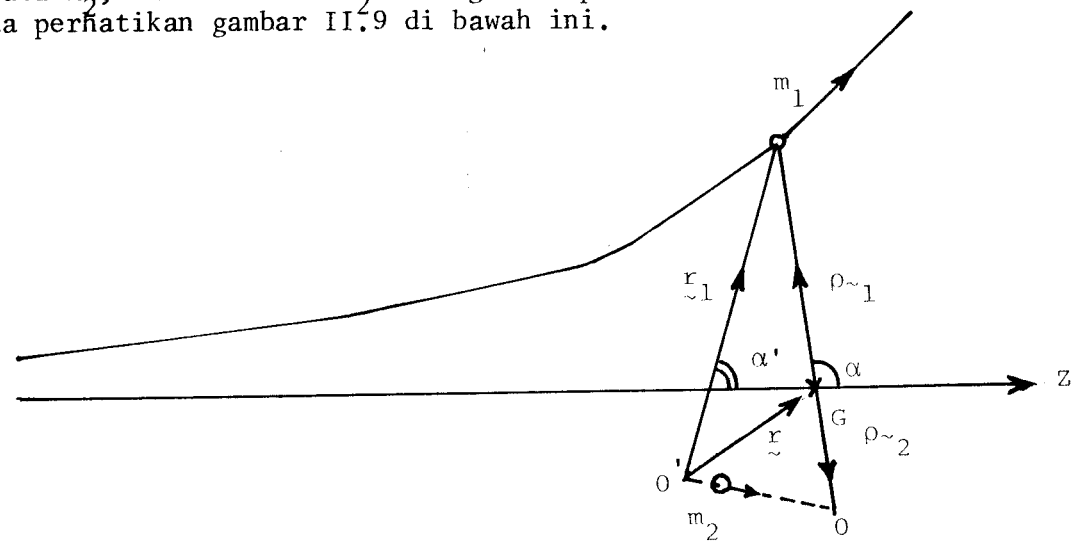


Gambar II.8.
Diagram polar tampang lintang diferensial.

Oleh karena dalam kenyataannya, flux titik materi yang ditembakkan adalah terbatas sampai dengan yang parameter benturannya $p = P_{maximum}$ misalnya, maka sudut hamburannyapun terbatas dari $\varphi = \pi$ sampai dengan $\varphi_{minimum}$.

Dalam analisa kita di atas, kita menganggap bahwa m_2 adalah tetap di tempatnya. Namun kenyataannya tak demikian.

Maka perhitungan-perhitungan di atas perlu dikoreksi dengan memperhitungkan adanya efek pentalan, yakni di mana sebenarnya sewaktu m_1 mendekati m_2, titik materi m_2 itu agak terpental dari kedudukannya. Kita perhatikan gambar II.9 di bawah ini.



Gambar II.9.
Sudut hambur di dalam sistem koordinat laboratorium.

Karena tiada gaya luar, maka niscayalah titik berat G bergerak dengan kecepatan tetap sepanjang garis lurus, yakni misalnya sepanjang sumbu z. Seandainya m_2 tidak terpental, maka m_2 akan tetap berada di titik 0' misalnya, sehingga garis penghubung m_1m_2 membuat sudut α' dengan sumbu z. Akan tetapi sebenarnya m_2 terpental ke 0 sehingga garis penghubung m_1m_2 membuat sudut α dengan sumbu z.
Sewaktu m_1 masih jauh sekali dari m_2, yakni misalnya kita katakan pada saat $t = -\infty$, vektor $\underset{\sim}{r}_1$ yang menghubungkan m_2 dengan m_1 boleh dikatakan sejajar dengan sumbu z.
Pada saat ini kita tuliskan $\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{r}_1 (-\infty)$.
Sebaliknya, sewaktu m_1 sudah terhambur jauh, yakni misalnya kita katakan pada saat $t = +\infty$, dan m_2 berada di 0, vektor $\underset{\sim}{r}_1$ boleh dikatakan sejajar dengan asimptot lintasan.
Pada saat ini kita tuliskan $\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{r}_1 (+\infty)$.
Jadi apa yang kita sebut sudut hambur Θ dalam pembahasan di atas, sesungguhnya bukan sudut antara $\underset{\sim}{r}_1 (-\infty)$ dan $\underset{\sim}{r}_1 (+\infty)$, melainkan antara $\underset{\sim}{r}_1 (-\infty)$ dan $\underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty)$, atau singkatnya

$$\Theta = \alpha (+\infty) = \left\{ - \underset{\sim}{r}_1 (-\infty); \underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty) \right\} \tag{102}$$

Namun dalam experimen apa yang sebenarnya teramati sudut hambur

$$\Theta' = \alpha' (+\infty) = \left\{ - \underset{\sim}{r}_1 (-\infty); \underset{\sim}{r}_1 (+\infty) \right\} \tag{103}$$

di mana α' dan $\underset{\sim}{r}_1$ adalah seperti yang tertera di gambar II.9. Kita selidiki sekarang hubungan antara Θ dan Θ'. Dari kedua persamaan (102) dan

(103) di atas, hubungan itu akan ternyatakan oleh hubungan antara $\underset{\sim}{r}_1 (+\infty)$ dan $\underset{\sim}{\rho}1 (+\infty)$ bersama $\underset{\sim}{r}_1 (-\infty)$.
Karena dalam proses hamburan, hukum kekekalan impuls memegang peranan maka hubungan di atas diharapkan diperoleh dari penerapan hukum keke - kalan impuls.
Akan tetapi hukum kekekalan impuls, menyatakan hubungan antara kecepatan-kecepatan, bukan vektor-vektor kedudukan, Maka terlebih dahulu persamaan-persamaan (102) dan (103) harus dinyatakan dalam bentuk fung si kecepatan.
Untuk ini tidaklah begitu sukar melakukannya, sebab pada saat $t = -\infty$, $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty)$ adalah searah dengan $-\underset{\sim}{r}_1(-\infty)$ dan begitu pula $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty)$ searah dengan $\underset{\sim}{r}_1(+\infty)$ dan $\underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty)$ searah dengan $\underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty)$.
Dengan demikian persamaan-persamaan (102) dan (103) dapat pula ditulis sebagai

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty);\ \underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty) \right\} \tag{104}$$

$$\mathbb{Q}' = \left\{ \dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty);\ \dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty) \right\} \tag{105}$$

Selanjutnya dengan mengingat bahwa pada saat $t = -\infty$, m_2 boleh dikatakan masih diam, dengan hukum kekekalan impuls berlaku persamaan

$$m_1 \dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty) = m_1 \dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty) + m_2 \dot{\underset{\sim}{r}}_2(+\infty) \tag{106}$$

di mana r_2 adalah vektor kedudukan m_2 sesudah terpental dari kedudukan nya semula di O'. Dengan kata lain $\underset{\sim}{r}_2$ ialah vektor kedudukan m_2 terhadap O', yang kita ambil selaku pusat koordinat yang tetap.
Karena yang kita kehendaki adalah hubungan antara $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty)$, $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty)$, dan $\underset{\sim}{\rho}_1 (+\infty)$, maka $\dot{\underset{\sim}{r}}_2(+\infty)$ dalam persamaan (106) harus dinyatakan dalam hubungannya dengan $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty)$. Hubungan ini kita dapati dari definisi titik berat

$$\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} = \frac{m_1 \dot{\underset{\sim}{r}}_1 + m_2 \dot{\underset{\sim}{r}}_2}{M}$$

yang lalu memberikan

$$\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}}\ (+\infty) = \frac{m_1 \dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty) + m_2 \dot{\underset{\sim}{r}}_2(+\infty)}{M} \tag{107}$$

Kemudian, dari gambar II.9, kita lihat hubungan

$$\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{\bar{r}} + \underset{\sim}{\rho}_1$$

yang berarti $\dot{r}_1 = \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\bar{\rho}}}_1$

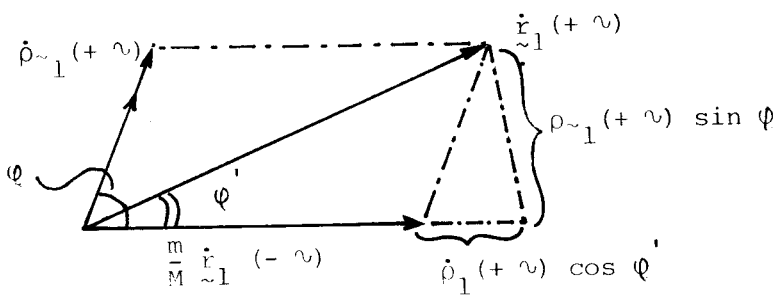
yang berarti $\dot{\underset{\sim}{r}}_1 = \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}} + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_1$

dan $$\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty) = \dot{\underset{\sim}{\bar{r}}}(+\infty) + \dot{\underset{\sim}{\rho}}_1(+\infty) \qquad (108)$$

Akhirnya dengan eliminasi $\dot{\underset{\sim}{r}}_2(+\infty)$ dan $\dot{\underset{\sim}{\bar{r}}}(+\infty)$, persamaan-persamaan (106), (107), dan (108) di atas menghasilkan hubungan antara $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty)$, $\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty)$ dan $\dot{\underset{\sim}{\rho}}_1(+\infty)$ dalam bentuk

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_1(+\infty) = \dot{\underset{\sim}{\rho}}_1(+\infty) + \frac{m_1}{M}\dot{\underset{\sim}{r}}_1(-\infty) \qquad (109)$$

Persamaan (109) ini langsung memberikan φ dan φ' dengan pertolongan diagram gambar II.10 di bawah ini.



Gambar II.10.
Hubungan antara φ dan φ'

Dari diagram gambar II.10 di atas terlihat bahwa

$$\tan\varphi' = \frac{\dot{\underset{\sim}{\rho}}_1(+\infty)\sin\varphi}{\frac{m_1}{M}\dot{r}_1(-\infty) + \dot{\rho}_1(+\infty)\cos\varphi} \qquad (110)$$

Persamaan (110) ini dapat juga dituliskan sebagai

$$\tan\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\frac{m_1}{M}\frac{\dot{r}_1(-\infty)}{\dot{\rho}_1(+\infty)} + \cos\varphi} \qquad (111)$$

yang dapat lebih disederhanakan lagi bilamana pernyataan $\frac{\dot{1}_1(-\infty)}{\dot{\rho}_1(+\infty)}$ dapat disederhanakan.

Untuk ini kita ingat akan tetapnya kecepatan relatif yang dinyatakan oleh persamaan (80) yang dalam hal ini menjadi

$$\dot{r}_1(-\infty) = \dot{\rho}_1(+\infty) + \dot{\rho}_2(+\infty) \tag{112}$$

dengan mengingat bahwa pada saat $t = -\infty$, m_2 masih belum terpental sehingga kecepatan relatifnya adalah kecepatan m_1 yaitu $\dot{r}_1(-\infty)$. Demikianlah maka dari persamaan (112) kita peroleh

$$\frac{\dot{r}_1(-\infty)}{\rho_1(+\infty)} = 1 + \frac{\dot{\rho}_2(+\infty)}{\dot{\rho}_1(+\infty)} \tag{113}$$

Suku kedua ruas kanan persamaan (113) ini dapat dinyatakan sebagai perbandingan massa-massa m_1 dan m_2, yakni dengan mengingat persamaan (75) atau persamaan (76) ataupun persamaan (52) yang memberikan

$$\frac{\dot{\rho}_2(+\infty)}{\dot{\rho}_1(+\infty)} = \frac{m_1}{m_2}$$

sehingga akhirnya kita peroleh

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Theta} \tag{114}$$

Sudut hambur yang teramati di laboratorium, yaitu Θ', dikatakan sudut hambur di dalam sistem koordinat laboratorium sedang sudut hambur yang sesungguhnya, yaitu Θ, yakni yang terlihat dari titik berat G disebut sudut hambur di dalam sistem koordinat titik berat. Apabila $m_2 = m_1$, maka persamaan (114) menjadi

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \Theta}{1 + \cos \Theta}$$

$$= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos \tfrac{1}{2}\Theta}{1 + 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\Theta - 1}$$

$$= \tan \tfrac{1}{2}\Theta$$

Ini berarti bahwa hamburan yang meliputi sudut hambur dari $\Theta = 0$ sampai $\Theta = \pi$ itu, di dalam sistem koordinat laboratorium, yakni yang teramati, hanya meliputi sudut hambur dari $\Theta' = 0$ sampai $\Theta' = \frac{\pi}{2}$.

Jadi dalam hal ini tidak terjadi hamburan balik (back scattering) yang diamati, artinya hamburannya paling jauh hanya sampai ke arah tegak lurus arah datang titik materi m_1.
Adapun hubungan antara tampang lintang diferensial di dalam sistem koordinat laboratorium $\sigma(\varphi')$ dengan tampang lintang diferensial di dalam sistem koordinat titik berat $\sigma(\varphi)$ dengan mudah dapat dilihat dari persamaan (95).
Titik-titik materi yang datang dari elemen luasan 2π pdp yakni yang parameter benturannya antara p dan p + dp, akan terhambur dengan sudut hambur φ dalam sistem koordinat titik berat dan dengan sudut hambur φ' dalam sistem koordinat laboratorium. Dengan demikian maka dari persamaan (95) kita peroleh

$$\sigma(\varphi) = \frac{d(\tfrac{1}{2} p^2)}{d \cos \varphi}$$

$$\sigma(\varphi') = \frac{d(\tfrac{1}{2} p^2)}{d \cos \varphi'}$$

sehingga $$\sigma(\varphi') = \frac{d \cos \varphi}{d \cos \varphi'} \sigma(\varphi) \qquad (115)$$

di mana $\frac{d \cos \varphi}{d \cos \varphi'}$ dapat diperoleh dari persamaan (114).

Kita hitung sekarang merosotnya tenaga kinetik m_1 sesudah mengalami hamburan.
Tenaga kinetik m_1 sesudah terhambur dibandingkan dengan sewaktu belum terhambur, dalam koordinat laboratorium, diberikan oleh

$$\frac{\tfrac{1}{2} m_1 \{(\dot{r}_1 (+\infty)\}^2}{\tfrac{1}{2} m_1 \{\dot{r}_1 (-\infty)\}^2} = a^2 \text{ misalnya}$$

atau

$$a^2 = \frac{\{\dot{r}_1(+\infty)\}^2}{\{\dot{r}_1(-\infty)\}^2} \qquad (116)$$

Perbandingan tenaga kinetik ini sudah tentu tergantung pada arah hamburan φ' dalam sistem koordinat laboratorium, serta ditentukan pula oleh massa masing-masing titik materi.
Dari gambar II.10 terlihat bahwa

$$\{\dot{\rho}_1(+\infty)\}^2 = \{\dot{r}_1(+\infty)\}^2 + \{\frac{m_1}{M} \dot{r}_1(-\infty)\}^2 - 2\{\dot{r}_1(+\infty)\}\{\frac{m_1}{M} \dot{r}_1(-\infty)\} \cos \varphi'$$

yang menghasilkan

$$\frac{\left\{\dot{r}_1(+\infty)\right\}^2}{\left\{\dot{r}_1(-\infty)\right\}^2} = \frac{\left\{\dot{\rho}_1(+\infty)\right\}^2}{\left\{\dot{r}_1(-\infty)\right\}^2} - \frac{m_1^2}{M^2} + \frac{2m}{M}\,\frac{\dot{r}_1(+\infty)}{\dot{r}_1(-\infty)}\,\cos\varphi'$$

yang dengan mengingat persamaan (116) dapat pula dituliskan sebagai

$$a^2 = \frac{\left\{\dot{\rho}_1(+\infty)\right\}^2}{\left\{\dot{r}_1(-\infty)\right\}^2} - \frac{m_1^2}{M^2} + \frac{2m_1}{M}\,a\cos\varphi' \qquad (117)$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (117) harus kita eliminasi dengan menyatakannya dalam fungsi massa titik materi m_1 dan m_2. Hal ini dapat dilakukan dengan menerapkan persamaan (112) dan persamaan (75) yang lalu menghasilkan

$$\frac{\dot{r}_1(-\infty)}{\dot{\rho}_1(+\infty)} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = \frac{M}{m_2}$$

yakni

$$\frac{\dot{\rho}_1(+\infty)}{\dot{r}_1(-\infty)} = \frac{m_2}{M}$$

Dengan demikian persamaan (117) menjadi

$$a^2 = \frac{m_2^2}{M^2} - \frac{m_1^2}{M^2} + 2\,\frac{m_1}{M}\,a\cos\varphi'$$

$$= \frac{(m_2+m_1)(m_2-m_1)}{M^2} + 2\,\frac{m_1}{M}\,a\cos\varphi'$$

$$= \frac{m_2-m_1}{M} + 2\,\frac{m_1}{M}\,a\cos\varphi'$$

atau $$a^2 - 2a\,\frac{m_1}{M}\cos\varphi' - \frac{m_2-m_1}{M} = 0 \qquad (118)$$

Persamaan (118) ini menghasilkan

$$a = \frac{m_1}{M} \cos \varphi' \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{M^2} \cos^2 \varphi' + \frac{m_2 - m_1}{M}}$$

Oleh karena $a = \dfrac{\dot{r}_1(+\omega)}{\dot{r}_1(-\omega)}$ adalah besaran positif, maka harga a yang sesuai dengan kenyataan adalah yang diberikan oleh

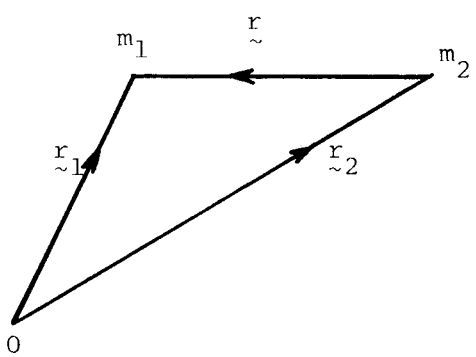
$$a = \frac{m_1}{M} \cos \varphi' + \sqrt{\frac{m_1^2}{M^2} \cos^2 \varphi' + \frac{m_2 - m_1}{M}} \qquad (119)$$

Keadaan khusus misalnya ialah untuk $m_1 = m_2$. Untuk keadaan ini, persamaan (119) menjadi

$$a = \cos \varphi'$$

8. Massa Tereduksi

Dalam pembahasan hukum-hukum Keppler di bab I pasal 5, matahari dipandang tetap ditempatnya. Sebenarnya tidaklah demikian halnya. Karena massa matahari jauh lebih besar daripada massa planet, maka menurut persamaan (75) kecepatan matahari dalam sistem koordinat titik berat, memang jauh lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan planet.
Kita perhatikan gambar II.11 di bawah ini.



Gambar II.11.
Keterangan hal massa tereduksi.

Misalkan m_1 ialah planet dan m_2 adalah matahari dan vektor kedudukan m_1 terhadap m_2 adalah

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}_1 - \underset{\sim}{r}_2 \qquad (120)$$

Dalam pembahasan hukum-hukum Keppler di atas, di mana m_2 dipandang tetap kedudukannya dan diambil sebagai pusat sistem koordinat 0, kita tulis persamaan gerak m_1 terhadap m_2 sebagai

$$\underset{\sim}{F} = m_1 \ddot{\underset{\sim}{r}}$$

Persamaan ini berlaku hanya apabila m_2 tetap.
Pada hakekatnya persamaan gerak m_1 terhadap 0 adalah

$$\underset{\sim}{F} = m_1 \ddot{\underset{\sim}{r}}_1 \qquad (121)$$

Maka terhadap matahari, m_2, persamaan geraknya yang tepat dapat ditulis kan sebagai

$$\underset{\sim}{F} = \mu \ddot{\underset{\sim}{r}}$$

misalnya, di mana μ ialah massa pengganti m_1 agar gaya gravitasi F dapat menyatakan percepatan m_1 terhadap m_2; μ ini disebut massa tereduksi. Kita hendak mencari berapakah harga μ tersebut.
Persamaan gerak matahari m_2 terhadap 0 adalah

$$-\underset{\sim}{F} = m_2 \ddot{\underset{\sim}{r}}_2 \qquad (123)$$

Tanda minus ini berhubungan dengan hukum Newton ke III reaksi = aksi dengan arah reaksi berlawanan dengan arah aksi di mana sebagai reaksinya ialah gaya tarik m_1 oleh m_2 sedang sebagai reaksinya ialah gaya tarik m_2 oleh m_1. Demikianlah dari persamaan-persamaan (120), (121), (122), dan (123) dengan mudah kita peroleh

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (124)$$

Massa tereduksi μ ini dipakai sebagai massa terkoreksi untuk menggantikan massa planet dalam persamaan-persamaan pada pembahasan hukum - hukum Keppler di atas.

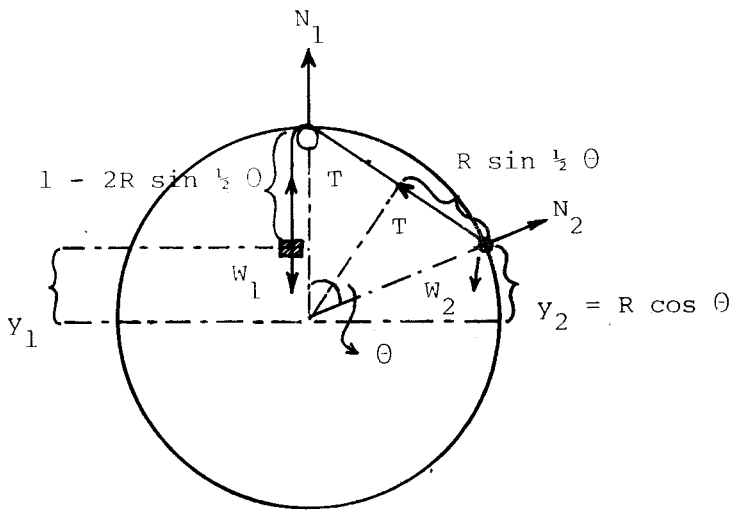
III. MEKANIKA SISTEM MEKANIS

1. Pendahuluan

Yang dimaksud dengan sistem mekanis ialah sistem di mana bagian - bagiannya mempunyai kaitan mekanis satu sama lain. Sistem mekanis dapat berwujud himpunan titik-titik materi, kerangka yang tersusun atas benda-benda tegar yang dapat berubah-ubah polanya, dan lain sebagainya.
Hukum Newton dalam mekanika, hanyalah mengenai gerakan titik materi dan himpunan titik-titik materi. Maka untuk mempelajari mekanika secara umum, perlu dikembangkan teori-teori mekanika lebih lanjut. Sebagai pemuka-pemuka ilmu mekanika sesudah Isaac Newton (tahun 1642 - 1727) dapat disebutkan Johan Bernoulli (tahun 1667 - 1748), Jean Le Ron D'Alembert (tahun 1717 - 1783), Joseph Louis Lagrange (tahun 1736 - 1813), William Rowan Hamilton (tahun 1805 - 1865).

2. Azas Usaha Semu

Azas usaha semu dikemukakan oleh Johan Bernoulli pada tahun 1717. Azas usaha semu mengatakan bahwa jumlah usaha semu oleh bagian - bagian sistem yang dalam keadaan setimbang adalah nol.
Yang disebut usaha semu ialah usaha yang berhubungan dengan pergeseran semu; pergeseran semu ialah pergeseran kecil yang mungkin.
Pergeseran yang dimaksud, dikatakan semu, karena dalam keadaan setimbang, pergeseran itu sebenarnya tidak terjadi. Untuk menjelaskan apa yang dimaksud, kita ambil contoh seperti tertera pada gambar III.1 di bawah ini.



Gambar III.1.
Contoh penerapan metode usaha semu.

Suatu pemberat yang beratnya W_1 dihubungkan dengan tali lewat kerek ke cincin yang beratnya W_2 dan cincin itu dapat bergerak tanpa gesekan sepanjang tepi lingkaran yang dilingkarinya.

Pergeseran semu yang dimaksud ialah turunnya pemberat yang disertai oleh bergesernya cincin ke atas sepanjang tepi lingkaran, dari kedudukan setimbangnya.
Yang dimaksud setimbang di sini ialah bahwa tiap-tiap bagian sistem berada dalam keadaan tidak bergerak.
Adapun gaya-gaya yang kita lihat bekerja pada gambar III.1 di atas ialah gaya-gaya dalam T, N_1 dan N_2 serta gaya-gaya luar W_1 dan W_2.
Gaya dalam T sudah tentu tidak melakukan usaha selama pergeseran sepanjang tali karena di ujung-ujung tali bekerja gaya yang masing-masing sebesar T dengan arah yang berlawanan sehingga usaha totalnya nol.
Gaya-gaya normal N_1 yakni yang oleh tepi lingkaran ke kerek, tidak melakukan usaha sebab kerek itu tetap tempatnya, sedang gaya normal N_2 juga tidak melakukan usaha sebab arah pergeserannya, yakni sepanjang tepi lingkaran, adalah tegak lurus N_2 tersebut. Jadi gaya-gaya yang melakukan usaha hanyalah gaya-gaya luar W_1 dan W_2 dan usaha itu untuk pergeseran kecil adalah

$$dU = W_1 dy_1 + W_2 dy_2$$

Maka azas usaha semu menyatakan bahwa sistem akan berada dalam keadaan setimbang apabila jumlah usaha-usaha semu oleh berat W_1 dan W_2 itu adalah nol, yakni

$$W_1 dy_1 + W_2 dy_2 = 0$$

Dari gambar III.1 kita amati

$$y_1 = R - (1 - 2R \sin \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$dy_1 = R \cos \tfrac{1}{2}\theta \; d\theta$$

$$y_2 = R \cos \theta$$

$$dy_2 = - R \sin\theta \; d\theta$$

y_1 dan y_2 masing-masing ialah jarak W_1 dan W_2 di atas sumbu horisontal X, yang lewat pusat lingkaran.
Dari ketiga persamaan-persamaan di atas dengan mudah kita dapatkan sudut θ pada keadaan setimbang, yaitu

$$\theta = 2 \sin^{-1} \tfrac{1}{2} \frac{W_1}{W_2}$$

Secara umum, untuk azas usaha semu ini dapat diterangkan pertanggunggan jawab teorinya sebagai berikut.
Seperti halnya dengan titik materi, maka sistem mekanis dinyatakan berada dalam keadaan setimbang apabila tenaga potensialnya V berharga extreem, yakni boleh jadi maximum, boleh jadi minimum.
Secara matematis syarat setimbang ini dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Menurut hukum kekekalan tenaga mekanik tersebut di bab I pasal 1 di atas, turunnya tenaga potensial adalah sebanyak usaha yang dilakukan, yaitu

$$- \delta V = \delta U \quad \text{atau} \quad \delta V = - \delta U$$

Dengan demikian, syarat setimbang di atas dapat pula dituliskan sebagai

$$- \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

yang lalu menghasilkan

$$\delta U = 0$$

Adapun diferensial usaha oleh gaya-gaya pada sistem mekanis adalah

$$\delta U = \Sigma \, \delta U_i = \Sigma \frac{\partial U_i}{\partial r_i} \, \delta r_i = \Sigma \, \underset{\sim}{F}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i$$

Maka syarat setimbang untuk sistem mekanis adalah

$$\delta U = \Sigma \, \underset{\sim}{F}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i = 0$$

Di lain pihak, jumlah usaha oleh gaya-gaya dalam adalah nol sebab gaya-gaya dalam secara berpasangan saling menghapuskan. Jadi dengan singkat kita dapat merumuskan azas usaha semu

$$\Sigma \, \underset{\sim}{F}_i^{(1)} \cdot \partial \underset{\sim}{r}_i = 0 \qquad (125)$$

yang berarti jumlah usaha masing-masing bagian sistem oleh gaya luar ada lah nol.
Perlu diperhatikan di sini bahwa pergeseran $\delta \underset{\sim}{r}_i$ masing - masing bagian berkaitan satu sama lain yakni tidak sembarang.

3. Azas D'Alembert

Dalam mekanika titik materi kita kenal hukum Newton ke II

$$\underset{\sim}{F} = \frac{d}{dt} (m \underset{\sim}{v}) = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{l} = \dot{\underset{\sim}{\ell}}$$

dan dalam mekanika sistem materi, dari persamaan - persamaan (54) dan (56), kita dapatkan

$$\underset{\sim}{F} = \Sigma \, \underset{\sim}{F}_i = \frac{d}{dt} \underset{\sim}{L} = M \ddot{\underset{\sim}{r}}$$

Persamaan ini tidak dapat diterapkan untuk sistem mekanis, sebab kita mengenyampingkan pengertian titik berat dalam sistem mekanis. Lagi pula, untuk sistem mekanis gerakan masing-masing bagian adalah berkaitan

sehingga sukar untuk menyatakan gerakannya dengan meninjau gerakan masing-masing bagian, sebab pada masing-masing bagian tidak hanya bekerja gaya luar tetapi juga gaya-gaya dalam yang boleh jadi cukup rumit. Maka timbul gagasan oleh D'Alembert pada tahun 1743 untuk menyatakan gerakan sistem mekanis dalam kaitannya dengan gaya-gaya luar, seperti halnya dengan azas usaha semu, dan berubahnya impuls per satuan waktu untuk masing-masing bagian.
Untuk masing-masing bagian, sudah tentu

$$\underset{\sim}{F}_i = \frac{d}{dt}\ \underset{\sim}{1}_i$$

Tetapi pada umumnya,

$$\underset{\sim}{F}_i^{(1)} \neq \frac{d}{dt}\ \underset{\sim}{1}_i = \dot{\underset{\sim}{1}}_i$$

Namun dari azas usaha semu di pasal 2 yang dirumuskan oleh persamaan (125), tidak setimbangnya sistem berarti ada perubahan impuls pada masing-masing bagian, yang berarti

$$\Sigma\ \underset{\sim}{F}_i^{(1)} \cdot \delta\underset{\sim}{r}_i = \Sigma\ \dot{\underset{\sim}{1}}_i \cdot \delta\underset{\sim}{r}_i$$

sehingga berlakulah hubungan

$$\Sigma(\underset{\sim}{F}_i^{(1)} - \dot{\underset{\sim}{1}}_i) \cdot \delta\underset{\sim}{r}_i = 0 \qquad (126)$$

Persamaan (126) ini ialah pernyataan singkat azas D'Alembert. Perumusan azas D'Alembert ini sebentuk dengan azas usaha semu Bernoulli, untuk syarat kesetimbangan, hanya di sini terhadap gaya luar tiap bagian sistem, harus dikurangkan dengan perubahan impuls per satuan waktu dari bagian itu selaku penyetimbangnya.
Perlu diperhatikan bahwa persamaan (126) berarti

$$\Sigma\ \underset{\sim}{F}_i^{(1)} = \Sigma\ \dot{\underset{\sim}{1}}_i$$

namun bukannya

$$\underset{\sim}{F}_i^{(1)} = \dot{\underset{\sim}{1}}_i$$

Untuk jelasnya kita ambil contoh soal di pasal 2 dengan memperhatikan kembali gambar III.1.
Seandainya pemberat W_1 ditambah, sistem yang tadinya setimbang menjadi tidak lagi setimbang dan W_1 mulai bergerak turun sedang W_2 mulai meluncur ke atas sepanjang tepi lingkaran.

Maka menurut azas D'Alembert, berlaku persamaan

$$(\underset{\sim}{W}_1 . d\underset{\sim}{r}_1 - m_1 \ddot{\underset{\sim}{r}}_1 . d\underset{\sim}{r}_1) + (\underset{\sim}{W}_2 . d\underset{\sim}{r}_2 - m_2 \ddot{\underset{\sim}{r}}_2 . d\underset{\sim}{r}_2) = 0$$

jika m_1 dan m_2 ialah massa pemberat yang beratnya W_1 dan massa cincin yang beratnya W_2.
Kecepatan W_1 dan W_2 pada saat $\Theta = \Theta'$ dari saat $\Theta = \Theta_o$, dapat diperoleh dengan mengintegralkan persamaan di atas, dengan mengingat hal-hal berikut.

$$\underset{\sim}{W}_1 . d\underset{\sim}{r}_1 = W_1 dy_1 = W_1 \, d\left\{R - (1 - 2R \sin \tfrac{1}{2}\Theta)\right\}$$

$$\underset{\sim}{W}_2 . d\underset{\sim}{r}_2 = W_2 dy_2 = W_2 \, d \ (R \cos \Theta)$$

$$\int_o^v m \ddot{\underset{\sim}{r}} . d\ddot{\underset{\sim}{r}} = \int_o^v m \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} . d\underset{\sim}{r} = \int_o^v m \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} . d\underset{\sim}{v} = \int_o^v m\underset{\sim}{v} . d\underset{\sim}{v} = \tfrac{1}{2} mv^2$$

dan mengingat pula kecepatan W_2 selalu sama dengan kecepatan W_1 yakni $v_2 = v_1 = v$ misalnya, karena W_1 dan W_2 bersambungan.
Pengintegralan dari $\Theta = \Theta_o$ ke $\Theta = \Theta'$ akan menghasilkan

$$\left\{W_1 R \sin \tfrac{1}{2}\Theta' - \sin \tfrac{1}{2}\Theta_o) - \tfrac{1}{2} m_1 v^2\right\} + \left\{-W_2 R(\cos \Theta' - \cos \Theta_o) - \tfrac{1}{2} m_2 v^2\right\} = 0$$

yakni

$$v = \left[\frac{2R}{m_1 + m_2} \left\{W_1(\sin \tfrac{1}{2}\Theta' - \sin \tfrac{1}{2}\Theta_o) - W_2(\cos \Theta' - \cos \Theta_o)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Jadi jelaslah bahwa keuntungannya dengan azas D'Alembert seperti halnya dengan azas usaha semu, ialah tidak usahnya diperhitungkan gaya-gaya dalam masing-masing bagian sistem, sehingga memudahkan perhitungan.

4. Persamaan Lagrange

Pada umumnya, seperti pada contoh di atas, transformasi koordinat sering diperlukan. Pada contoh tersebut, transformasi itu ialah dari sistem koordinat Cartesian X - Y ke sistem koordinat polar yang meli - batkan sudut Θ. Oleh karena pergeseran satu bagian sistem berkaitan dengan pergeseran bagian lain, misalnya pada contoh di atas pergeseran $d\underset{\sim}{r}_2$ berkaitan dengan pergeseran dr_1, maka untuk memperoleh variabel-varia - bel yang tidak berkaitan satu sama lain seperti halnya Θ pada contoh di atas perlu dilakukan transformasi.

Pada umumnya transformasi dari sistem koordinat r_1, r_2, r_3, ... t ke sistem koordinat q_1, q_2, q_3 ..., t dapat dilakukan dengan menyatakan

$$\underset{\sim}{r}_i = \underset{\sim}{r}_i(q_1, q_2, q_3 \ldots . t) \qquad (127)$$

sehingga

$$\underset{\sim}{v}_i = \frac{d\underset{\sim}{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t}$$

$$\underset{\sim}{v}_i = \sum_j \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \qquad (128)$$

Marilah kita bentuk persamaan (126) azas D'Alembert dalam sistem koordinat $(q_1, q_2, q_3 \ldots)$.
Menurutkan persamaan transformasi (127), kita dapat menulis

$$\sum \underset{\sim}{F}_i . d\underset{\sim}{r}_i = \sum_i \sum_j \underset{\sim}{F}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j Q_j dq_j$$

dengan

$$Q_j = \sum_i \underset{\sim}{F}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_i} \qquad (129)$$

Q_j ini lalu disebut gaya umum (generalized force) yakni seakan-akan adalah hasil transformasi gaya F dari sistem koordinat $(\underset{\sim}{r}_1\ \underset{\sim}{r}_2\ \underset{\sim}{r}_3 \ldots\ldots)$ ke sistem koordinat $(q_1\ q_2\ q_3 \ldots)$. Adapun transformasi increment pergeseran $d\underset{\sim}{r}_i$ sudah tentu diberikan oleh

$$dr_i = \sum_j \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_i} dq_j$$

Selanjutnya dengan persamaan (130) ini kita dapatkan

$$\dot{\underset{\sim}{l}}_i . d\underset{\sim}{r}_i = m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i . d\underset{\sim}{r}_i$$

$$= m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_i} dq_j$$

$$= m_i \sum_j (\ddot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}) dq_j$$

$$= m_i \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}) - \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}) \right\} dq_j$$

$$= m_i \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} (\underset{\sim}{v}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}) - \underset{\sim}{v}_i \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}) \right\} dq_j \qquad (131)$$

Kemudian dari persamaan (128) kita dapatkan

$$\frac{\partial \underset{\sim}{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \tag{132}$$

Persamaan (132) ini hendak kita pakai untuk substitusi $\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}$ pada suku pertama ruas kanan persamaan (131), sedang untuk suku kedua ruas kanan persamaan (131) kita tulis

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial^2 \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d \underset{\sim}{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial \underset{\sim}{v}_i}{\partial q_j}$$

sehingga persamaan (131) menjadi

$$\dot{\underset{\sim}{i}}_i \cdot d\underset{\sim}{r}_i = m_i \sum_j \left\{\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{v}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{v}_i}{\partial q_j}\right) - \underset{\sim}{v}_i \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{v}_i}{\partial q_j}\right\} dq_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\partial q_j}\right) dq_j \tag{133}$$

Persamaan (133) ini bersama persamaan (129) akhirnya memberikan perumusan azas D'Alembert persamaan (126) dalam bentuk apa yang disebut persamaan Lagrange

$$\sum_j \left[\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}\right\} - Q_j\right] dq_j = 0 \tag{134}$$

dengan $K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ selaku tenaga kinetik sistem.
Jadi persamaan Lagrange tak lain ialah persamaan D'Alembert yang ditransformasikan ke sistem koordinat umum.
Apabila koordinat-koordinat q_j tidak tergantung satu sama lain, yakni berarti bahwa sistemnya adalah apa yang disebut holonomik, persamaan (134) menjadi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j \tag{135}$$

Agar tenaga kinetik K dapat didiferensialkan terhadap q dan $\dot{q}$, v^2 perlu ditransformasikan sebagai berikut.
Dari persamaan (128) kita dapat menulis

$$v_i^2 = \underset{\sim}{v}_i \cdot \underset{\sim}{v}_i = \sum_j \left(\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_j \sum_k \frac{\partial \underset{\sim}{r}_j}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_j \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2$$

sehingga tenaga kinetik $K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$ menjadi

$$K = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k m_i \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_k} q_j q_k + \sum_i \sum_j m_i \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} q_j$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2$$

Apabila medan gayanya sedemikian hingga dapat dinyatakan sebagai minus gradian suatu potensial, maka persamaan (129), dapat dilulis sebagai:

$$\sum_j Q_j \delta q_j = \sum_j \sum_i \underset{\sim}{F}_i \cdot \frac{\delta \underset{\sim}{r}_i}{\delta q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_j \sum_i \underset{\sim}{F}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i$$

$$= - \delta v$$

yang lalu memberikan

$$Q_j = - \frac{\delta_V}{\delta_{qi}}$$

sehingga jikalau V tak tergantung t, persamaan (135) menjadi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \qquad (136)$$

dengan

$$L = K - V$$

L, disebut fungsi Lagrange dan persamaan (136) dikenal sebagai persamaan Lagrange yang dikemukakan pada tahun 1788. Persamaan Lagrange ini sangat bermanfaat untuk merumuskan persamaan gerak sistem bilamana tenaga kinetik dan tenaga potensial sistem dapat dirumuskan.
Sebagai contoh misalnya kita ambil osilator harmonik yakni suatu titik materi yang bergetar secara harmonis.
Tenaga kinetik dan tenaga potensial osilator harmonik, diberikan oleh

$$K = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \tfrac{1}{2} k x^2$$

Maka fungsi Lagrange-nya adalah

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 - \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - kx$$

sehingga persamaan geraknya diberikan oleh

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

atau

$$\ddot{x} = - \frac{k}{m} x$$

yang lalu menghasilkan

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Apabila di dalam sistem koordinat q tidak semua variabel koordinat nya bebas terhadap yang lain, maka persamaan (136) sudah tentu tidak berlaku dan harus dipakai persamaan (134). Tetapi persamaan (134) itu

menyangkut penjumlahan sigma sehingga rumit penyelesaiannya. Maka perlu diciptakan rumus yang sebentuk dengan rumus (136) yakni yang tidak menyangkut penjumlahan sigma untuk sistem yang tidak sepenuhnya holonomik itu.
Misalnya dari n variabel q_1, q_2, q_3 .... q_n, m variabel di antara mereka bergantungan satu sama lain, yang berarti variabel bebasnya hanya se banyak n - m buah. Maka m variabel yang bergantungan itu selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear n-m variabel bebas tersebut.
Maka kaitan holonomik (holonomic constraint) nya dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan simulatan

$$a_{11} \delta q_1 + a_{12} \delta q_2 + ... + a_{1n} \delta q_n = 0$$

$$a_{21} \delta q_1 + a_{22} \delta q_2 + ... + a_{2n} \delta q_n = 0$$

$$a_{m1} \delta q_1 + a_{m2} \delta q_2 + ... + a_{mn} \delta q_n = 0$$

atau secara singkat

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \delta q_j = 0 \text{ dengan } k = 1, 2, 3 ..... m \qquad (137)$$

Dari m persamaan ini hanya ada m variabel yang dapat dicari, dan m variabel itu akan ternyatakan sebagai fungsi linear n - m variabel yang lain, yang kita sebut variabel bebas tersebut. Selanjutnya, karena sistem tidak sepenuhnya holonomik, persamaan Lagrange-nya dari persamaan (134) menjadi

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0 \qquad (138)$$

Tujuan kita sekarang ialah mengubah persamaan (138) menjadi bentuk holomonik seperti persamaan (136).
Untuk ini Lagrange berpaling ke persamaan kaitan holonomik (137) yang terdiri atas m persamaan itu. Persamaan pertama dikalikan dengan λ_1, ke dua dengan λ_2, dan seterusnya lalu dikombinasi linearkan dan ditambah - kan ke persamaan (138).
Jelasnya adalah sebagai berikut.
Kita bentuk persamaan

$$\lambda_1 a_{11} \delta q_1 + \lambda_1 a_{12} \delta q_2 + ... \lambda_1 a_{1n} \delta q_n = 0$$

$$\lambda_2 a_{21} \delta q_1 + \lambda_2 a_{22} \delta q_2 + \ldots\ldots \lambda_2 a_{2n} \delta q_n = 0$$

$$\lambda_m a_{m1} \delta q_1 - \lambda_m a_{m2} \delta q_2 + \ldots\ldots \lambda_m a_{mn} \delta q_n = 0$$

Ke m persamaan ini lalu dijumlahkan dan diatur menjadi

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots\ldots \lambda_m a_{m1}) \delta q_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots\ldots$$

$$\lambda_m a_{m2}) \delta q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (\lambda_1 a_{mn} + \ldots\ldots \lambda_m a_{mn}) \delta q_n = 0$$

Persamaan ini lalu ditambahkan ke persamaan (138) dan diatur menjadi

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + (\lambda_1 a_{11} + \ldots \lambda_m a_{m1}) \right\} \delta q_1$$

$$+ \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + (\lambda_1 a_{12} + \ldots \lambda_m a_{m2}) \right\} \delta q_2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots \lambda_m a_{mn}) \delta q_n$$

$$= 0$$

atau secara singkat

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{kj} \right\} \delta q_j = 0 \qquad (139)$$

Kemudian dipilihlah apa yang lalu disebut Lagrange multiplier λ_1, λ_2.. .. λ_m itu sedemikian rupa hingga masing - masing suku pada persamaan (139) adalah nol, yakni

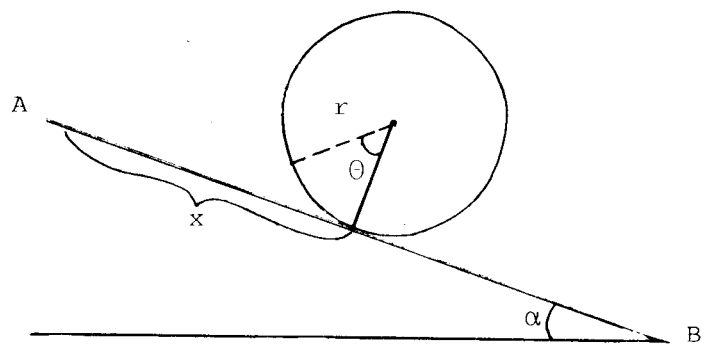
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{kj} = 0 \qquad (140)$$

untuk j = 1, 2, ... n.

Persamaan (140) ini terdiri atas n persamaan, sedangkan untuk dapat memperoleh $q_1 q_2 \ldots q_n$ dan $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$ diperlukan n + m persamaan. Adapun m persamaan lainnya yang kita perlukan tersebut, dapat diperoleh dari persamaan kaitan holonomik (137) dengan mendiferensialkan ke t dua kali, yakni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \ddot{q}_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{141}$$

Sebagai contoh misalnya menentukan persamaan gerak sebuah lingkaran yang mengguling di atas papan miring seperti tertera pada gambar III.2.



Gambar III.2
Persamaan Lagrange untuk lingkaran mengguling

Dari gambar III.2, jelaslah bahwa persamaan kaitan holonomiknya ialah

$dx = rd\Theta$ atau $dx - rd\Theta = 0$

dengan x dan Θ selaku koordinat-koordinatnya, sehingga seandainya kita mengikuti persamaan (137) kita tulis

$$a_{11} \delta x + a_{12} \delta \Theta = 0$$

yang berarti dalam hal ini $a_{11} = 1$, $a_{12} = -r$

Sedangkan a_{21}, a_{31} dan seterusnya adalah nol.

Selanjutnya,

$$K = \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} Mr^2\dot{\Theta}^2$$

$$V = Mg (1 - x) \sin \alpha$$

dengan mengingat momen enersianya

$$I = Mr^2$$

dan dengan mengambil V = 0 sewaktu lingkaran menyinggung dasar yakni titik beratnya berjarak r dari dasar.
Dengan demikian maka fungsi Lagrange-nya adalah

$$L = \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} Mr^2 \dot{\theta}^2 - Mg(1 - x) \sin \alpha$$

sehingga persamaan (140) memberikan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \lambda r = 0$$

yang menghasilkan

$$M\ddot{x} - Mg \sin \alpha + \lambda = 0$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0$$

Sedang persamaan kaitan holonomiknya, dengan menerapkan persamaan (141), menghasilkan

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

yakni

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

sehingga akhirnya kita peroleh

$$\ddot{x} = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha$$

$$\ddot{\theta} = \tfrac{1}{2} \frac{g}{r} \sin \alpha$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} Mg \sin \alpha$$

5. Azas Hamilton

Menilik miripnya persamaan Lagrange dengan persamaan Euler Lagrange dalam kalkulus variasi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

yang berlaku untuk suatu kurve grafik (x,y) sepanjang mana

$$\int f \left\{ (x,y,y' = \frac{dy}{dx}) \right. dx$$

berharga extreem, maka persamaan gerak sistem mekanis tentunya adalah sedemikian rupa hingga

$$\int L\ (q_1, q_2 \ldots., \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots., t)\ dt$$

berharga extreem.

Sejalan dengan kurve di dalam ruang dimensi dua (x,y) dalam kalkulus, maka perubahan keadaan koordinat sistem mekanis dapat dinyatakan dengan suatu kurve di dalam apa yang disebut ruang konfigurasi. Untuk jelasnya, kita perhatikan gambar III.3.

Gambar III.3.
Ruang konfigurasi.

Kita tahu bahwa keadaan sistem mekanis ditentukan oleh koordinat umum (generalized coordinat) $q_1, q_2 \ldots. q_n$ dan kecepatan umum $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_n$ Jadi untuk sistem mekanis yang terdiri atas n bagian atau elemen, keada an sistem dapat dinyatakan oleh letak suatu titik di dalam ruang konfigurasi berdimensi 2n.
Perubahan keadaan sistem atau singkatnya gerakan sistem akan terlukiskan oleh bergeraknya titik tersebut.
Lebih lanjut persamaan di atas berarti pula

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = 0 \qquad (142)$$

yang mengatakan bahwa perubahan keadaan sistem mekanis dari saat t_1 sampai saat t_2 adalah sedemikian rupa sehingga

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

berharga optimum (extreem). Pernyataan ini dikemukakan oleh Hamilton dan lalu disebut azas Hamilton, yang tak lain ialah azas variasi dalam mekanika.
Azas Hamilton ini sudah tentu berlaku sama di dalam sistem koordinat Cartesian, sehingga tentunya dapat pula dijabarkan dari azas D'Alembert.

6. Penjabaran asas Hamilton dari Azas D'Alembert

Baik azas D'Alembert, maupun persamaan Lagrange, ataupun azas Hamilton dan persamaan Hamilton yang akan kita pelajari kemudian, masing-masing merumuskan secara umum, gerakan sistem mekanis umumnya (termasuk pula gerakan titik materi selaku sistem mekanis yang paling elementair). Maka antara mereka tentu ada kaitannya satu sama lain, misalnya yang satu dapat dijabarkan dari yang lain, dengan yang kurang fundamental dapat dijabarkan dari yang lebih fundamental, sedangkan yang sama tingkat fundamentalnya, dapat saling dijabarkan dari yang satu ke yang lain.
Di pasal 6 ini kita hendak menjabarkan azas Hámilton dari azas D'Alembert. Sebagaimana dirumuskan oleh persamaan (126), azas D'Alembert adalah berdasarkan variasi diferensial, sedangkan sebaliknya azas Hamilton adalah berdasarkan variasi integral.
Maka pengintegralan persamaan (126) tentunya akan menghasilkan rumus azas Hamilton persamaan (142).
Pengintegralan persamaan (126) akan menghasilkan

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \underset{\sim}{F}_i^{(1)} \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i dt$$

Ruas kiri persamaan di atas tak lain ialah integral increement usaha dari saat $t = t_1$ sampai saat $t = t_2$, sedangkan di bab I pasal 1, increement usaha = berkurangnya increement tenaga potensial; atau dirumuskan

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \underset{\sim}{F}_i^{(1)} \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U \, dt = \int_{t_1}^{t_2} - \delta V \, dt$$

Di lain pihak, untuk ruas kanan, kita dapat menulis

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_1 \ddot{\underset{\sim}{r}}_1 \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_i \left\{ \frac{d}{dt}(\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i) - \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i \right\} dt$$

$$= \Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \delta \dot{\underset{\sim}{r}}_i \, dt$$

Suku pertama ruas kanan adalah nol, sebab harga r_i pada saat t_1 dan t_2 terhadap mana sistem mekanis ditinjau adalah tertentu, yakni $\delta \underset{\sim}{r}_i = 0$, sedang suku kedua ruas kanan adalah

$$-\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, \delta(\tfrac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -\delta K \, dt$$

dengan K ialah tenaga kinetik sistem.
Dengan demikian akhirnya kita peroleh

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,(K - V)\, dt = 0$$

yaitu

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\, L\, dt = 0 \quad \text{atau} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

7. Penjabaran Persamaan Lagrange dari Azas Hamilton

Dengan mudah kita jabarkan persamaan Lagrange dari azas Hamilton sebagai berikut.
Dengan mengingat

$$\delta L = \Sigma \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

maka persamaan azas Hamilton (142) menghasilkan

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Sigma \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i)\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, d(\delta q_i) = 0$$

Untuk suku kedua ruas kiri kita dapat menulis

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d(\delta q_i) = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, d(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i) - \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, \delta q_i\, d(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})$$

atau

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i)\, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

yang lalu menghasilkan

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = 0 - \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \delta \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

dengan mengingat bahwa pada saat t_1 dan t_2, q_i mengambil harga tertentu yang berarti pada saat t_1 dan t_2 tersebut $\delta q_i = 0$. Jadi

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt = 0$$

yang lalu menghasilkan persamaan Lagrange umum (termasuk yang non holomonik)

$$\Sigma \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0$$

8. Ruang Fase dan Persamaan Hamilton

Di atas kita mendefinisikan ruang konfigurasi sebagai ruang yang sistem koordinatnya ialah koordinat-koordinat umum q_1, q_2 ..... q_n dan kecepatan-kecepatan umum $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ ... $\dot{q}_n$.
Akan tetapi, sebenarnya dalam mekanika, besaran impuls (atau momentum) lebih penting daripada kecepatan, sebab keadaan dinamis sistem mekanis kecuali ditentukan oleh koordinat-koordinat kedudukannya $q_1 q_2$ ..... q_n juga ditentukan oleh keadaan impuls masing - masing elemen. Maka kita hendak menciptakan apa yang disebut ruang fase yang sistem koordinatnya ialah koordinat-koordinat umum dan impuls-impuls umum (generalized momenta). Tetapi sebelumnya kita harus terlebih dahulu mendefinisikan impuls umum P.
Kita tinjau sistem mekanis yang paling sederhana yaitu misalnya himpunan titik-titik materi bebas, artinya tiada interaksi satu sama lain.
Dalam hal ini fungsi Lagrangenya adalah

$$L = K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

sehingga impuls materi ke i ialah

$$m_i v_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$$

Maka kita hendak mendefinisikan impuls umum sebagai

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{143}$$

Selanjutnya, kita hendak menyatakan tenaga total sistem dalam hubungannya dengan koordinat umum dan impuls umum, bersama fungsi Lagrange. Di atas kita telah mendefinisikan fungsi Lagrange sebagai

$$L = K - V$$

sedangkan tenaga total sistem adalah misalnya

$$H = K + V$$

Dari kedua hubungan ini dengan eliminasi V, kita dapatkan

$$H = 2K - L$$

Jadi langkah berikutnya, kita hendak menyatakan tenaga kinetik sistem K, dalam hubungannya dengan koordinat umum dan impuls umum. Untuk ini dengan mengingat persamaan (130), kita menulis

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2$$

Dari persamaan ini, kita peroleh

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \left(\sum \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

sehingga

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2$$

$$= 2K$$

atau

$$2\,K = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

Apabila tenaga potensialnya V tidak tergantung pada kecepatan elemen - elemen sistem, maka

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

sehingga akhirnya kita peroleh hubungan

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

yang dari persamaan (143) menjadi

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad (144)$$

Tenaga total H yang dinyatakan dengan rumus (144) ini disebut fungsi Hamilton (Hamiltonian).
Jadi sekarang kita dapat menyatakan tenaga total H sebagai fungsi koordinat umum, impuls umum, dan waktu t, atau singkatnya

$$H = H\,(p, q, t) \qquad (145)$$

Kita sekarang hendak menjabarkan persamaan gerak sistem di dalam ruang fase.
Dari persamaan (145) kita dapatkan

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Akan tetapi menurut persamaan (144)

$$dH = \sum_i p_i \, d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - dL$$

dan

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Sehingga dengan mengingat definisi impuls umum yakni persamaan (146) dan mengingat pula persamaan Lagrange (136) akhirnya dengan mudah kita peroleh hubungan kanonik

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (146)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

yang lalu disebut persamaan Hamilton.
Persamaan gerak menurut Hamilton ini berbentuk persamaan diferensial orde satu yang berarti tentu lebih mudah penyelesaiannya jikalau dibandingkan dengan persamaan Lagrange yang berbentuk persamaan diferensial orde dua itu.
Perlu diperhatikan di sini bahwa agar dapat menerapkan rumus Hamilton tersebut, fungsi Hamilton H harus terlebih dahulu dinyatakan sebagai fungsi p_i, q_i dan t. Jadi misalnya $\dot{q}_i$ harus dinyatakan dalam p_i. Untuk menjelaskan, kita ambil contoh gerakan perputaran titik materi oleh gaya sentral gravitasi. Untuk ini kita ambil sistem koordinat polar (r,Θ). Tenaga kinetiknya kita peroleh dari persamaan (2)

$$K = \tfrac{1}{2}\, m\dot{r}.\dot{r}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\, m\, (r\dot{\Theta})^2$$

dan tenaga potensialnya, diberikan oleh persamaan (43)

$$V = -\, m\, \frac{a}{r}$$

sehingga fungsi Lagrangenya adalah

$$L = K - V$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\, mr^2\dot{\Theta}^2 + m\, \frac{a}{r}$$

Jadi menurut persamaan (143) impuls umumnya ialah

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = m\dot{\Theta} r^2$$

dan fungsi Lagrangenya dinyatakan dalam impuls umum menjadi

$$L = \frac{p_r}{2m} + \frac{p_\Theta}{2mr^2} + m\, \frac{a}{r}$$

sehingga Hamilton-nya, dari persamaan (144), menjadi

$$H = p_r\dot{r} + p_\Theta\dot{\Theta} - \left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\Theta^2}{2mr^2} + m\, \frac{a}{r}\right)$$

yang menurut persamaan di atas untuk p_r dan p_θ, $\dot{r}$ dan $\dot{\theta}$ dapat dinyatakan dalam hubungannya dengan p_r dan p_θ yakni :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \text{ dan } \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

sehingga akhirnya kita tuliskan fungsi Hamilton dalam bentuk

$$H = p_r \frac{p_r}{m} + p_\theta \frac{p_\theta}{mr^2} - \left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + m \frac{a}{r}\right)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - m \frac{a}{r}$$

dan berlakulah persamaan Hamilton

$$\dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial r} = - \left(-2 \frac{p_\theta^2}{2mr^3} + m \frac{a}{r^2}\right)$$

$$= m \left(\dot{\theta}^2 r - \frac{a}{r^2}\right)$$

yang berarti

$$m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 r - m \frac{a}{r^2}$$

Hasil ini cocok dengan hasil dari persamaan (31), sebagaimana yang kita harapkan.
Selanjutnya persamaan Hamilton juga menghasilkan

$$\dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

karena H tidak mengandung θ.
Hal ini sesuai dengan apa yang kita harapkan, yaitu

$$p_\theta = \text{tetap}$$

atau

$$m\dot{\theta} r^2 = \text{tetap}$$

sebagaimana dinyatakan oleh persamaan (22).

Jadi dengan cara Hamilton, mula-mula dituliskan fungsi Lagrange-nya, lalu dari fungsi Lagrange dicari impuls umumnya, dan kemudian fungsi Hamilton-nya dinyatakan dalam fungsi koordinat umum dan impuls umum dengan menyatakan kecepatan umum dalam impul umum.
Cara Hamilton ini memang berkepanjangan dan tidak praktis untuk memecahkan masaalah yang sederhana.
Namun cara Hamilton ini ternyata menjadi penting untuk mendasari perkembangan ilmu Fisika teori misalnya dalam mekanika kwantum dan teori medan.

9. Koordinat Siklik dan Cara Routh

Pada contoh soal di pasal 8 di atas, kita dapatkan $\dot{p}_\Theta = 0$ yang berarti p_Θ tetap, sebab persamaan Hamilton-nya tak mengandung variabel Θ.
Di lain pihak variabel Θ ini berhubungan dengan perputaran maka disebut koordinat siklik dan untuk koordinat siklik ini, impuls pasangannya (conjugate momentum) yaitu p_Θ adalah kekal atau tetap (conserved).
Pada umumnya, suatu koordinat q disebut siklik apabila koordinat tersebut tak terdapat dalam fungsi Lagrange dan fungsi Hamiltonnya, dan untuk koordinat siklik ini, impuls pasangannya adalah kekal.
Untuk koordinat siklik, q_s, persamaan Lagrange (136) memberikan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - 0 = 0$$

yang dari definisi impuls umum persamaan (143), lalu menghasilkan

$$\frac{d}{dt}\, p_s = 0$$

yang berarti p_s tetap, tak tergantung waktu, dan hanya inilah yang dihasilkan oleh persamaan Lagrange.
Di lain pihak, persamaan Hamilton (146), meskipun agak berkepanjangan, memberikan hasil yang lebih, yakni kecuali p_s tetap, juga dapat diperoleh $\dot{q}_s$ dari hubungan

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

Jadi untuk koordinat yang siklik, penerapan persamaan Hamilton lebih menguntungkan daripada penerapan persamaan Lagrange. Maka Routh memakai cara gabungan, yakni dengan memakai persamaan Lagrange untuk koordinat yang non siklik, dan memakai persamaan Hamilton untuk yang siklik.
Karena cara Hamilton hanya akan dipakai untuk yang siklik saja, maka dalam penulisan fungsi Hamilton-nya, untuk $\Sigma\, p_i q_i$ cukup dituliskan untuk yang siklik saja.
Fungsi Hamilton yang demikian memang bukan fungsi Hamilton yang sebenarnya dan disebut fungsi Routh (Routhian)

Fungsi Routh ini yakni

$$R = \Sigma\, p_s \dot{q}_s - L \qquad (147)$$

dengan penjumlahan sigma-nya hanya meliputi yang siklik saja, lebih singkat daripada fungsi Hamilton, namun dapat sepenuhnya menggantikan fungsi Hamilton dalam penerapan persamaan Hamilton untuk koordinat yang siklik, sebab

$$\dot{q}_s = \frac{\delta H}{\delta p_s} = \frac{\delta R}{\delta p_s} \text{ dan } \dot{p}_s = -\frac{\delta H}{\delta q_s} = -\frac{\delta R}{\delta q_s}$$

Untuk jelasnya kita ambil kembali contoh soal di pasal 8.
Maka dalam soal tersebut kita tulis

$$R = p_\Theta \dot{\Theta} - (\tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{\Theta}^2 r^2 + m\frac{a}{r})$$

Dari persamaan (143) kita dapatkan

$$p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = m\dot{\Theta} r^2$$

dan karena Θ adalah siklik, maka p_Θ tetap = α misalnya, sehingga

$$\alpha = m\dot{\Theta} r^2$$

atau

$$\dot{\Theta} = \frac{\alpha}{mr^2}$$

dan

$$R = \alpha \frac{\alpha}{mr^2} - (\tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} m \frac{\alpha^2}{m^2 r^4} r^2 + m\frac{a}{r})$$

$$= \frac{\alpha^2}{mr^2} - (\tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{mr^2} + m\frac{a}{r})$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{mr^2} - \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 - m\frac{a}{r}$$

Jadi

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{mr^2}$$

cocok dengan apa yang kita tuliskan di atas.

Perpustakaan Pembinaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994

10. Penjabaran Persamaan Hamilton dari Azas Variasi Hamilton

Dari persamaan (144)

$$H = \Sigma\, p_j \dot{q}_j - L$$

yakni

$$L = \Sigma\, p_j \dot{q}_j - H \tag{148}$$

tentunya persamaan Hamilton dapat dijabarkan dari azas variasi Hamilton yang diberikan oleh persamaan (142)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

Dari persamaan (142) ini kita tulis

$$\delta \int L\, dt = \int \delta\, L\, dt$$
$$= \int \delta(\Sigma\, p_j \dot{q}_j - H)\, dt$$

Kita tinjau

$$\delta(p_j \dot{q}_j) = p_j\, \delta\, \dot{q}_j + \dot{q}_j\, \delta\, p_j$$

Karena persamaan Hamilton bersangkutan dengan $\delta\, q_j$ di samping dengan $\delta\, p_j$, maka $\delta\, \dot{q}_j$ harus diubah ke bentuk δq_j yakni dengan menuliskan

$$\delta\, \dot{q}_j = \delta\, \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt}\, (\delta\, q_j)$$

sehingga selanjutnya

$$p_j\, \delta\, \dot{q}_j = p_j\, \frac{d}{dt}\, (\delta\, q_j)$$
$$= \frac{d}{dt}\, (p_j\, \delta\, q_j) - \delta\, q_j \cdot \frac{dp_j}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\, (p_j\, \delta\, q_j) - \dot{p}_j\, \delta\, q_j$$

dan

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, p_j\, \delta\, \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\Sigma\, p_j\, \delta\, q_j)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\, \dot{p}_j\, \delta\, q_j) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d\,(\Sigma\, p_j\, \delta\, q_j) - \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\, \dot{p}_j\, \delta\, q_j) dt$$

$$= \Sigma\, p_j\, \delta\, q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int (\Sigma\, \dot{p}_j\, \delta\, q_j)\, dt$$

Adapun suku pertama ruas kanan persamaan di atas adalah nol, sebab di $t = t_1$ dan $t = t_2$ memang tidak diadakan variasi, yaitu $\delta\, q_j = 0$ di $t = t_1$ dan $t = t_2$.
Dengan mengingat hasil perhitungan ini serta mengingat pula

$$\delta\, H = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta\, p_j + \Sigma \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta\, q_j$$

akhirnya persamaan (148) dan persamaan (142) menghasilkan

$$\int \left\{ \Sigma \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta\, p_j \right\} dt - \int \left\{ \Sigma \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta\, q_j \right\} dt = 0$$

Oleh karena variasi δp_j dan δq_j satu tak tergantung yang lain, maka haruslah

$$\int \left\{ \Sigma \left(\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta\, p_j \right\} dt = 0$$

dan

$$\int \left\{ \Sigma \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta\, q_j \right\} = 0$$

Karena persamaan ini dipenuhi oleh sembarang harga p_j dan q_j maka tentulah

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

atau

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

dan

$$\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

atau

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

11. Transformasi Kanonik dan Persamaan Hamilton-Jacobi

Persamaan Hamilton tidak langsung memberikan penyelesaian yang tuntas sebagai $q = q(t)$ dan $p = p(t)$ kecuali kalau misalnya diketahui

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \alpha_i \quad \text{suatu tetapan}$$

sehingga dengan mengintegralkannya, diperoleh $q_i = q_i(t)$ dalam bentuk

$$q_i = \alpha_i t + \beta_i$$

Maka dapat dipikirkan kemungkinan mengadakan transformasi dari ruang fase (q, p) ke ruang fase (Q, P) yang lain sedemikian rupa hingga di dalam ruang fase yang baru, didapatkan $\dot{Q}_i = \alpha_i$ yang tetap.
Agar Q dan P adalah koordinat umum dan impuls umum di dalam ruang fase yang baru, maka transformasi itu harus sedemikian rupa hingga bentuk kanonik persamaan Hamilton tetap berlaku, dan transformasi demikian disebut transformasi kanonik.
Misalnya transformasi itu dari q_i ke Q_i untuk koordinat umum dan dari p_i ke P_i untuk impuls umum yang bersangkutan.
Karena persamaan ini dipenuhi oleh sembarang harga P_j dan q_j maka tentulah

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

atau

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

dan

$$\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

atau

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

11. Transformasi Kanonik dan Persamaan Hamilton-Jacobi

Persamaan Hamilton tidak langsung memberikan penyelesaian yang tuntas sebagai $q = q(t)$ dan $p = p(t)$ kecuali kalau misalnya diketahui

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \alpha_i \quad \text{suatu tetapan}$$

sehingga dengan mengintegralkannya, diperoleh $q_i = q_i(t)$ dalam bentuk

$$q_i = \alpha_i t + \beta_i$$

Maka dapat dipikirkan kemungkinan mengadakan transformasi dari ruang fase (q, p) ke ruang fase (Q, P) yang lain sedemikian rupa hingga di dalam ruang fase yang baru, didapatkan $\dot{Q}_i = \alpha_i$ yang tetap.

Agar Q dan P adalah koordinat umum dan impuls umum di dalam ruang fase yang baru, maka transformasi itu harus sedemikian rupa hingga bentuk kanonik persamaan Hamilton tetap berlaku, dan transformasi demikian disebut transformasi kanonik.

Misalnya transformasi itu dari q_i ke Q_i untuk koordinat umum dan dari p_i ke P_i untuk impuls umum yang bersangkutan.

Maka di dalam sistem koordinat yang baru yaitu sistem koordinat (Q,P) tetap berlaku hubungan

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial H^*}{\partial Q_i}$$

jika H^* ialah fungsi Hamilton di dalam ruang fase yang baru. Perlu diperhatikan bahwa meskipun seandainya q, p, H di dalam ruang fase lama adalah besaran koordinat, impuls dan tenaga, Q, P, H^* di dalam ruang fase baru boleh jadi bukan besaran koordinat, impuls dan tenaga dalam artian fisis. Andaikata Q, P dan H^* kebetulan memang tetap merupakan besaran-besaran koordinat, impuls dan tenaga, yakni misalnya transformasi itu ialah transformasi sistem koordinat secara linear, maka sudah barang tentu dalam ruang fase yang baru, persamaan Hamilton tetap berlaku yang berarti transformasi itu pasti kanonik. Namun yang kita bahas di sini adalah transformasi yang lebih umum, bukannya hanya transformasi sistem koordinat. Dengan transformasi umum ini, pada umumnya hasil transformasi koordinat adalah fungsi impuls lama maupun koordinat lama, dan begitu juga hasil transformasi impulsnya. Atau secara singkat kita rumuskan

$$Q = Q\,(q, p, t)$$

$$P = P\,(q, p, t) \qquad (149)$$

Di pasal 10, kita menjabarkan persamaan Hamilton dari azas variasi Hamilton, secara matematis murni, tanpa menghiraukan gejala fisinya.
Maka di dalam ruang fase (Q, P) yang baru, tentunya juga berlaku azas variasi Hamilton yang diberikan oleh persamaan (142) dan dengan fungsi Lagrange L yang didefinisikan oleh persamaan (148).
Maka baik di dalam ruang fase baru maupun di dalam ruang fase lama berlaku persamaan-persamaan

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma_i p_i \dot{q}_i - H)\, dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma_i p_i \dot{Q}_1 - H^*)\, dt = 0$$

Dengan demikian pengintegralan kedua persamaan ini akan menghasilkan hubungan

$$\Sigma p_i \dot{q}_i - H = \Sigma p_i \dot{Q}_i - H^* + \frac{dF}{dt} \qquad (150)$$

dengan F ialah suatu tetapan integrasi, dengan mengingat

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dF = \delta F \Big|_{t = t_1}^{t = t_2} = 0$$

sebab pada saat $t = t_1$ dan $t = t_2$ tertentu antara mana integrasi dilakukan, harga variabel-variabel q, p, Q, P, t adalah tertentu, yakni δq, δp, δQ, δP, δt adalah nol sedangkan δF adalah fungsi deferensial-deferensial tersebut.
Selanjutnya, F memang merupakan fungsi variabel-variabel q, p, Q, P, t. Tetapi mengingat hubungan-hubungan pada dua persamaan (149), maka F cukup dinyatakan sebagai fungsi 5 - 2 = 3 di antara 5 variabel itu, misalnya

$$F = F_1 (q\ Q\ t)$$

atau

$$F = F_2 (q\ P\ t) \qquad (151)$$

atau

$$F = F_3 \ (p \ P \ t)$$

atau

$$F = F_4 \ (p \ Q \ t)$$

Lebih lanjut, agar F mengandung informasi tentang bentuk fungsi transformasi dari sistem koordinat lama ke sistem koordinat baru, maka dipilihlah F yang mengandung variabel di dalam kedua sistem koordinat, seperti halnya persamaan (151) di atas.
Jadi misalnya kita tak akan memilih

$$F = F \ (p \ q \ t)$$

dan

$$F = F \ (P \ Q \ T)$$

Dengan demikian fungsi F yang diberikan oleh persamaan (151) di atas, diharapkan dapat menentukan fungsi transformasinya, dan disebut fungsi generasi (generating function). Dari fungsi generasi ini tentunya dapat ditentukan hubungan variabel-variabel.
Misalnya untuk

$$F = F_1 \ (qQt)$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

sehingga persamaan (150) menjadi

$$\Sigma p_i \dot{q}_i - H = \Sigma P_i \dot{Q}_i - H^* + \Sigma \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \Sigma \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

atau

$$\Sigma p_i \dot{q}_i - H - \Sigma P_i \dot{Q}_i + H^* - \Sigma \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i - \Sigma \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Karena q dan Q dalam F_1 adalah variabel-variabel bebas, dan begitu pula $\dot{q}_i$ dan $\dot{Q}_i$, yakni dapat berharga sembarang, maka kofaktor $\dot{q}_i$ dan $\dot{Q}_i$ dalam persamaan di atas tentulah sama dengan nol, sehingga persamaan di atas menghasilkan

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad (152)$$

$$H^* = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

Persamaan (152) ini memberikan jalan untuk menentukan variabel-variabel yang tak terdapat dalam Fungsi generasi yakni p dan P dengan mendeferensialkan fungsi generasi terhadap variabel-variabel bebas yang ada dalam fungsi generasi yaitu q dan Q.
Dengan jalan yang sama, tentunya untuk

$$F = F_2(q\ p\ t)$$

kita dapat menentukan Q dan p dari $\frac{\partial F_2}{\partial q}$ dan $\frac{\partial F_2}{\partial p}$.

Namun cara di atas tidak dapat begitu saja diikuti untuk F_2 (q P t), sebab persamaan (151) yang kita libatkan itu hanya mengandung suku-suku dengan q_i dan P_i sedangkan yang kita butuhkan ialah suku - suku yang mengandung Q_i dan p_i. Maka kita ambil suatu akal dengan menuliskan

$$F_2(q\ P\ t) = F_1\ (q\ Q\ t) + \Sigma P_i Q_i$$

yang lalu memberikan

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial q_i}\dot{q}_1 + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_i P_i\dot{Q}_i + \sum_i \dot{P}_i Q_i$$

yang bersama persamaan (150) seperti di atas lalu menghasilkan

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad (153)$$

$$H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Demikianlah dengan cara seperti ini, untuk

$$F = F_3(p\ P\ t)$$

kita tuliskan

$$F_3(p\ P\ t) = F_1(q\ Q\ t) - \Sigma q_i p_i + \Sigma Q_i P_i$$

yang lalu menghasilkan

$$Q_i = \frac{\partial F_3}{\partial P_i}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad (154)$$

$$H^* = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Sedangkan untuk

$$F = F_4(p\ Q\ t)$$

dengan menuliskan

$$F_4(pQt) \overset{C}{=} F_1(qQt) - \Sigma p_i q_i$$

Kita peroleh

$$P_i = -\frac{\partial F_4}{\partial Q_i}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad (155)$$

$$H^* = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Dari persamaan-persamaan (152) sampai dengan (155) jelaslah bahwa apabila fungsi transformasinya tak mengandung t, maka F tak merupakan fungsi t sehingga $H^* = H$.
Dari uraian di atas, jelaslah bahwa fungsi generasi F merupakan kunci penyelesaian persamaan gerak. Tetapi untuk memilih dan menentukan F yang berarti memilih dan menentukan fungsi transformasi, merupakan masalah tersendiri yang tidak mudah. Hal ini akan kita bicarakan kemudian, dan sebelumnya akan kita ambil contoh untuk menunjukkan bagaimana peranan fungsi generasi.
Misalkan untuk fungsi generasi suatu osilator harmonik, dipilih

$$F = \tfrac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

yakni berbentuk sebagai F_1 persamaan (151).

Maka dari persamaan (152) kita dapatkan

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \tfrac{1}{2} \frac{m\omega q^2}{\sin^2 Q}$$

Kedua persamaan ini memberikan fungsi transformasi

$$q = \sqrt{\frac{2P \sin^2 Q}{m\omega}}$$

$$p = m\omega \left\{ \sqrt{\frac{2P \sin^2 Q}{m\omega}} \right\} \cot Q$$

$$= (\cos Q) \sqrt{2 P m \omega}$$

Selanjutnya tenaga potensial osilator harmonik dapat dituliskan sebagai

$$V = \tfrac{1}{2} kq^2$$

dan fungsi Hamilton-nya menjadi tertuliskan sebagai

$$H = \tfrac{1}{2} mq^2 + \tfrac{1}{2} kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

yang dari hasil di atas menjadi

$$H = \omega P \cos^2 Q + \frac{k}{2} \frac{2P \sin^2 Q}{m \omega}$$

$$= \omega P$$

sebab untuk osilator harmonik,

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

Lebih lanjut, karena F tak mengandung variabel t, maka

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

dan fungsi Hamilton-nya di dalam ruang fase (PQ) adalah

$$H^* = H = \omega P$$

Dengan menerapkan persamaan kanonik Hamilton (146) dalam ruang fase (P,Q), kita dapatkan

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P} = \omega$$

$$\dot{P} = - \frac{\partial H^*}{\partial Q} = 0$$

sehingga untuk penyelesaian Q dan P dapat kita tulis

$$P = \text{tetap dan } Q = \omega t + \alpha$$

Dengan mengingat H sebagai tenaga total osilator harmonik yakni misalnya E, mengingat hasil tersebut kita dapat menulis

$$P = \frac{H}{\omega} = \frac{E}{\omega}$$

sehingga dari hasil di atas kita peroleh

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m \omega^2}} \sin (\omega t + \alpha)$$

atau

$$q = A \sin (\omega t + \alpha)$$

dengan

$$A = \sqrt{\frac{2E}{m\,\omega^2}}$$

adalah amplitude Osilator.
Jadi tenaga total E berhubungan dengan amplitude A dan frekwensi $\frac{\omega}{2\Pi}$ menurutkan

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, \omega^2 A^2$$

Dapat kita perhatikan di sini bahwa di dalam ruang fase (P.Q), hasil di atas menunjukkan bahwa besaran P di sini adalah besaran tenaga dibagi kecepatan sudut, bukannya impuls dalam artian fisis, dan Q adalah besaran sudut.

Dari contoh-contoh di atas kita memahami bahwa dengan persamaan Hamilton kita dapat memperoleh persamaan gerak apabila fungsi Hamiltonnya diketahui atau dapat dirumuskan. Adapun transformasi kanonik ruang fase adalah dimaksudkan untuk memudahkan penyelesaian persamaan Hamilton tersebut.
Namun hal ini hanya mungkin bilamana fungsi generasi F yang sesuai dapat dirumuskan, dan dari fungsi generasi F inilah kemudian diperoleh persamaan gerak dan fungsi transformasi dengan mendiferensialkan fungsi generasi tersebut.
Untuk menentukan fungsi generasi F, kita tinjau hubungan F dengan fungsi Hamilton H yang telah diketahui. Hubungan ini terdapat dalam persamaan (152) sampai dengan (155) dalam bentuk

$$H^* = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Agar penyelesaiannya mudah, fungsi transformasinya dapat dipilih sedemikian rupa hingga fungsi Hamiltonnya di dalam ruang fase yang baru yaitu H* adalah nol, sehingga dapat kita tulis

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad (156)$$

Persamaan (156) ini, merupakan langkah pertama dalam pemilihan fungsi generasi F dan disebut persamaan Hamilton-Jacobi.
Agar F dapat dengan mudah dicari dari persamaan Hamilton-Jacobi (156), salah satu variabelnya H yaitu p atau q seyogyanya dinyatakan sebagai diferensial F terhadap variabel yang lain, yakni misalnya

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad \text{ataukah} \quad q = \frac{\partial F}{\partial p}$$

sesuai dengan persamaan (153) ataukah persamaan (155) sehingga persamaan (156) menjadi berbentuk

$$H(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

ataukah

$$H(p, \frac{\partial F}{\partial p}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Bentuk fungsi generasi yang memenuhi $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ adalah $F_1(qQt)$ dan $F_2(q,P,t)$ sedangkan yang memenuhi
$q = \frac{\partial F}{\partial p}$ ialah $F_3(p,P,t)$ dan $F_4(pQt)$.
Lebih lanjut, agar F dapat mudah diintegralkan, kita pilih F yang dapat diuraikan menjadi suku-suku yang tidak mengandung dan yang hanya mengandung variabel waktu t yakni

$$F = F_2'(q, P) + F_2''(t)$$

Suku pertama ruas kanan yakni $F_2'(q,p)$ disebut fungsi karakteristik. Adapun dari

$$H^* = 0$$

menurut persamaan Hamilton (146) memberikan

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i} = 0$$

yang berarti untuk Q_i dapat kita tulis

$$Q_i = \beta_i$$

yang tetap, tak tergantung waktu t.
Dan seperti itu pula dapat kita tulis

$$P_i = \alpha_i$$

Untuk menjelaskan ini, kita ambil lagi soal osilator harmonik di atas, yakni yang fungsi Hamiltonnya ialah

$$H = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} kq^2$$

Kita pilih

$$F = F_2(q\ P\ t)$$

sehingga dari persamaan (153) fungsi Hamiltonnya menjadi

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2'}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2} kq^2$$

yang bersama persamaan (156) menghasilkan

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2'}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2} kq^2 = \frac{\partial F_2''}{\partial t}$$

Karena ruas kiri persamaan tersebut hanya merupakan fungsi q saja, sedang ruas kanannya adalah fungsi t saja, maka masing-masing ruas tentulah suatu tetapan misalnya α. Dengan demikian dengan mengintegralkan - nya, kita dapatkan

$$F_2' = \int dq \sqrt{2m\ (\alpha - \tfrac{1}{2} kq^2)}$$

dan

$$F_2'' = -\alpha t$$

Untuk menemukan persamaan gerak $q = q(t)$, dari persamaan (153) kita peroleh

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

yakni

$$\beta = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial F_2'}{\partial \alpha} - t$$

$$= m \int \frac{dq}{\sqrt{2m\ (\alpha - \tfrac{1}{2} kq^2)}} - t$$

yang lalu menghasilkan

$$\beta + t = m \int \frac{dq}{\sqrt{2m\ (\alpha - \tfrac{1}{2} kq^2)}}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos q \sqrt{\frac{k}{2\alpha}}$$

yang selanjutnya memberikan

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \{\omega(\beta + t)\}$$

suatu persamaan getaran harmonik dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Adapun tenaga totalnya $E = H$ diberikan oleh persamaan Hamilton - Jacobi (156)

$$E + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

yakni

$$E + \frac{\partial}{\partial t}(F_2' - \alpha t) = 0$$

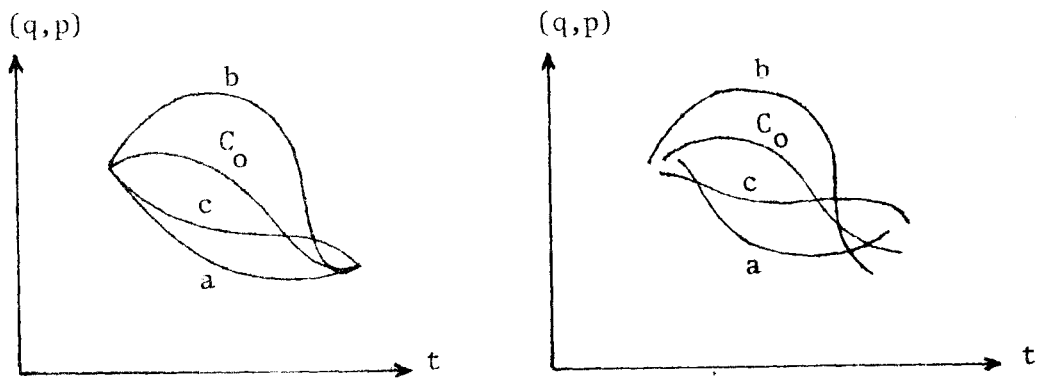
yang lalu menghasilkan

$$E = \alpha$$

Kita perhatikan di sini bahwa impuls umum $P = \alpha$ di dalam ruang fase (PQ) adalah tenaga total bukannya impuls dalam artian fisis.
Demikianlah dengan cara seperti itu dengan F yang lain (bukan F_2) tentunya akan menghasilkan hal yang sama.

12. Azas Action Terkecil (Least Action Principle)

Dalam pembicaraan azas variasi Hamilton, ditinjau variasi integral fungsi Lagrange L antara saat $t = t_1$ dan saat $t = t_2$ dan pada saat-saat tersebut keadaan sistemnya adalah tertentu. Menurut Hamilton, perubahan keadaan sistem mekanis terhadap waktu t dari $t = t_1$ sampai $t = t_2$ adalah sedemikian rupa hingga integral fungsi Lagrangenya terhadap t adalah optimum (berharga extreem).
Kalau perubahan keadaan sistem mekanis itu dilukiskan sebagai lintasan titik di dalam ruang fase dimensi 2n yang diagram representasinya seperti yang tertera pada gambar III.4, maka azas Hamilton mengatakan bahwa dari berbagai-bagai kemungkinan kurve yang semuanya berasal dari titik yang sama pada saat $t = t_1$ dan berakhir di titik yang sama pula pada saat $t = t_2$, kurve yang memenuhi hukum mekanika ialah yang sedemikian rupa hingga integral fungsi Lagrangenya terhadap waktu t dari $t = t_1$ sampai $t = t_2$ adalah optimum. Dalam gambar III.4 kurve ini ialah kurve c_o sedang kurve-kurve yang lain ialah kurve-kurve a, b, c ... dan lain-lain.



Gambar III.4.
Variasi Δ dalam azas action terkecil.

Jadi dengan azas Hamilton, koordinat-koordinatnya pada saat $t = t_1$ dan $t = t_2$ sudah diketahui secara pasti.
Untuk keadaan yang lebih umum kita hendak meneliti dari antara kurve-kurve di dalam diagram ruang fase, kurve yang manakah yang memenuhi

hukum mekanika, tanpa memastikan keadaan sistem mekanis pada saat $t = t_1$ dan $t = t_2$. Kurve-kurve ini misalnya dilukiskan sebagai kurve-kurve a^1', b', c' ... dan lain-lain pada gambar III.4.
Maka azas action terkecil mengatakan bahwa untuk sistem yang fungsi Hamiltonnya kekal, perubahan keadaan sistem mekanis dari saat $t = t_1$ sampai $t = t_2$ adalah sedemikian rupa hingga apa yang disebut action

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt$$

berharga terkecil.
Ini berarti pula

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i q_i \, dt = 0$$

dengan variasi Δ yang meliputi pula variasi kemungkinan keadaan pada saat $t = t_1$ dan $t = t_2$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.
Dari persamaan (144)

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt$$

$$= \Delta \int_{t_1}^{t_2} H \, dt + \Delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

Untuk sistem mekanis yang total tenaganya tetap, yakni yang memenuhi hukum kekekalan tenaga mekanik yang berarti fungsi Hamiltonnya H tetap, H di suku pertama ruas kanan dapat dikeluarkan dari integral sehingga persamaan di atas menjadi

$$\Delta A = H \, \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

jika Δt_1 dan Δt_2 ialah variasi t di sekitar t_1 dan t_2.
Selanjutnya

$$\Delta L = \delta L + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t$$

dengan δ tak lain ialah variasi L dengan t tetap tertentu. Demikianlah maka suku kedua ruas kanan dalam persamaan untuk A di atas menjadi

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t.\, dt$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (L \Delta t)\, dt$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Perlu diperhatikan di sini bahwa pada umumnya

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \neq 0$$

sebab di $t = t_1$ maupun di $t = t_2$ boleh ada variasi δq dan $\delta \dot{q}$, tidak seperti halnya dengan azas Hamilton.
Pada umumnya

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i\right) + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial \dot{q}_i\right)$$

sehingga

$$\delta \int L\, dt = \sum_i \int \left\{\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right\} dt$$

yang dengan mengingat persamaan Lagrange (136) menjadi

$$\delta \int L\, dt = \sum_i \int \left\{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right\} dt$$

$$= \sum_i \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) dt$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Dengan demikian kita dapat menulis untuk ΔA sebagai

$$\Delta A = H \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) \Big|_{t_1}^{t_2} + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Dari persamaan ini kiranya kita perlu menyatakan suku kedua ruas kanan dalam bentuk yang mengandung faktor Δt. Hal ini dapat kita lakukan dengan mengingat

$$\Delta q_i = \delta q_i + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Delta t$$

$$= \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t$$

yang berarti

$$\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t$$

Lebih lanjut, kalau dalam azas Hamilton variasi δq_i di $t = t_1$ dan $t = t_2$ adalah nol, maka dalam azas action terkecil, adalah Δq_i yang sama dengan nol di $t = t_1$ dan $t = t_2$.

Demikianlah maka dengan mengingat definisi impuls umum persamaan (143), akhirnya kita peroleh

$$\Delta A = H \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} - \Sigma_i p_i \dot{q}_i \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

dan akhirnya dari persamaan (144) atau (148) yang menghubungkan H dan L, persamaan di atas menjadi

$$\Delta A = 0$$

dan terbuktilah kebenaran azas action terkecil itu.

13. Variabel Action dan Variabel Sudut

Kita telah mempelajari bahwa untuk gerakan perputaran oleh gaya sentral, impuls putarnya adalah tetap. Maka untuk gerakan perputaran, dipikirkanlah untuk mentransformasikan ruang fase sehingga di dalam ruang fase baru impuls umumnya adalah tetap yakni sama dengan h misalnya.
Jadi di dalam ruang fase yang demikian berlaku

$$\oint p \, dq = h \oint dq = 2 \pi h$$

sebab koordinat pasangan impuls putar p adalah sudut putar q.
(Atas dasar inilah Sommerfeld mengemukakan rumus kondisi kwantumnya

$$\oint p dq = n \frac{h}{2 \pi}$$

dengan h ialah tetapan Planck, bukan tetapan impuls).
Integral di atas mengingatkan kita akan action

$$A = \int \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt$$

$$= \int \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} \, dt$$

$$= \int \sum_i p_i \, dq_i$$

Maka didefinisikanlah variabel action

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \tag{157}$$

Bahwa impuls umum tetap, mengingatkan kita akan transformasi ruang fase dalam persamaan Hamilton-Jacobi.
Akan tetapi transformasi ruang fase dengan menerapkan persamaan Hamilton-Jacobi menghasilkan impuls umum P yang berwujud tenaga.
Maka untuk mendapatkan ruang fase di dalam mana impuls umum P adalah tetap tetapi bukannya tetapan tenaga melainkan tetapan impuls putar, kita hendak melakukan transformasi lebih lanjut setelah persamaan Hamilton-Jacobi diterapkan.

Dari persamaan Hamilton-Jacobi, kita mempunyai

$$H(q, \frac{\partial F}{\partial q}) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

setelah kita tulis

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}$$

dan

$$F = F'(q,P) + F''(t)$$

$$= F'(q,\alpha) + F''(t)$$

dengan mengingat

$$P = \alpha$$

Selanjutnya

$$H = \alpha = \text{tetapan tenaga total}$$

Kita hendak melakukan transformasi sedemikian rupa hingga impuls umumnya ialah variabel action J_i.

Dari

$$J_i = \oint p_i \, dq_i$$

$$= \oint \frac{\partial F}{\partial q_i} \, dq_i = \oint \frac{\partial F'}{\partial q_i} \, dq_i$$

dan

$$F' = F'(q_1, q_2, \ldots q_n ; P_1, P_2 \ldots P_n)$$

$$= F'(q_1, q_2 \ldots q_n ; \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

maka untuk

$$F' = \sum_i F_i'(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

kita dapatkan

$$J_i = J_i(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

yakni suatu tetapan.
Sebaliknya,

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, J_2 \ldots J_n)$$

sehingga kita dapat menulis

$$F' = F'(q_1, q_2, \ldots, q_n, J_1, J_2, \ldots J_n)$$

Dengan mengambil $J_1, J_2 \ldots J_n$ sebagai impuls umum $P_1 P_2 \ldots P_n$ maka menurut persamaan (153) kita peroleh koordinat umum pasangannya

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial F'}{\partial P_i} = \frac{\partial F'}{\partial J_i}$$

yakni misalnya

$$W_i = \frac{\partial F'}{\partial J_i}$$

Jadi apa yang telah kita lakukan ialah menggantikan $P_i = \alpha_i$ dengan J_i selaku impuls umum, dan koordinat umum pasangannya W_i diperoleh dengan mengikuti persamaan (153).
Variabel W_i ini disebut variabel sudut karena memang merupakan besaran sudut dan pada hakekatnya ialah sudut fase. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.
Dari persamaan Hamilton, kita dapatkan

$$\dot{W}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

Tetapi

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

yang berarti pula

$$H = H(J_1, J_2 \ldots J_n)$$

sehingga $\frac{\partial H}{\partial J_i}$ adalah fungsi dari $J_1, J_2, \ldots J_n$, yakni misalnya

$$\nu_i(J_1, J_2 \ldots J_n).$$

Jadi

$$W_i = \nu_i(J_1, J_2 \ldots J_n)$$
$$= \nu_i(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

yaitu suatu tetapan tertentu, yang lalu memberikan

$$W_i = \nu_i \, t + \beta_i$$

dengan β_i suatu tetapan integrasi.
Selanjutnya kita tinjau

$$\Delta W_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_j} dq_j$$

yang dengan mengingat

$$W_i = \frac{\partial F'}{\partial J_i}$$

di atas menghasilkan

$$\Delta W_i = \oint \frac{\partial^2 F'}{\partial J_i \, \partial \, q_J} dq_j$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial F'}{\partial q_j} dq_j$$

yang dengan mengingat hubungan

$$J_i = \oint \frac{\partial F'}{\partial q_i} dq_i$$

di atas, persamaan tersebut menjadi

$$\Delta W_i = \frac{\partial}{\partial J_i} (J_j)$$

yang berarti

$$\Delta W_i = 1 \text{ bilamana } j = i$$

dan

$$\Delta W_i = 0 \text{ bilamana } j \neq i$$

Dengan demikian, mengingat fungsi generasi

$$F = F(qPt)$$
$$= F'(qP) + F''(t)$$

yang kita pilih itu, yang lalu memberikan

$$P_i = \frac{\partial F'}{\partial q}$$

kita dapat menulis

$$\Delta W_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_i dq_i$$
$$= 1$$

Ini berarti bahwa apabila q_i, yaitu suatu besaran sudut putar yang berpasangan dengan impuls putar p_i itu, mencakup keliling satu kali, W_i bertambah dengan satu.

Maka dari hubungan

$$W_i = \nu_i t + \beta_i \text{ yang berarti } \Delta W_i = \nu_i \Delta t$$

ν_i dapat diinterpretasikan sebagai frekwensi dan W_i dapat diinterpretasikan sebagai sudut fase.
Untuk menjelaskan pembahasan di atas, kita ambil lagi osilator harmonik di atas sebagai contoh.
Untuk osilator harmonik, impuls putar p diberikan oleh

$$p = \sqrt{2m(E - \tfrac{1}{2} kq^2)}$$
$$= \sqrt{2m(\alpha - \tfrac{1}{2} kq^2)}$$

Jadi

$$J = \oint pdq$$
$$= 2\pi\alpha \sqrt{\frac{m}{k}}$$

yang menghasilkan

$$\alpha = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

atau

$$H = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sehingga

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H}{\partial J}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \omega = \nu$$

yakni frekwensi osilator.

14. Invariansi Integral Poincare

Di atas kita membicarakan perihal transformasi kanonik ruang fase Dengan transformasi ini persamaan Hamilton tetap berlaku, yakni invarian.

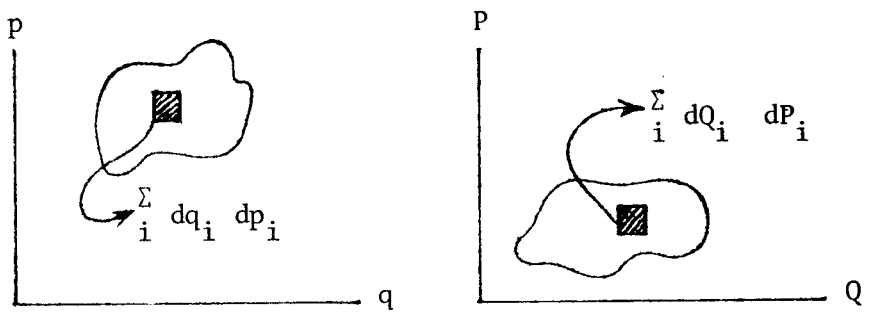
Poincare menunjukkan, bahwa transformasi kanonik juga menghasilkan invariansi apa yang disebut Integral Poincare

$$I = \iint \sum_i dq_i dp_i$$

yakni

$$\iint \sum_i dq_i dp_i = \iint \sum_i dQ_i dP_i$$

dengan integrasi yang meliputi luasan elemen volum ruang fase. Untuk menjelaskan yang dimaksud, kita lukiskan pernyataan tersebut dengan gambar seperti gambar III.5.



Gambar III.5.

Invariansi luasan ruang fase.

Oleh suatu transformasi, pada umumnya elemen volum di ruang fase baru, bentuknya maupun volumnya ataupun luas permukaannya berbeda dengan elemen volum semula di ruang fase lama. Menurut Poincare, apabila transformasinya adalah kanonik, maka luas permukaannya tidak berubah atau dikatakan invarian.
Adapun elemen luasan yang dimaksud tak lain ialah

$$ds = \sum_i dp_i dq_i$$

Hal ini dapat diterangkan sebagai berikut.
Dalam geometri, kita kenal bahwa letak titik di suatu permukaan tertentu ditentukan oleh dua parameter. Maka meminjam pengertian ini, letak titik di permukaan di dalam ruang fase ditentukan misalnya oleh dua parameter u dan v.
Dengan perkataan lain, kita dapat menulis

$$q_i = q_i(u, v)$$

$$p_i = p_i(u, v)$$

dan semacam itu pula untuk yang di dalam ruang fase (P, Q).
Demikianlah maka untuk elemen luasan $d\underset{\sim}{q}_i \times d\underset{\sim}{p}_i$, kita dapat menulis

$$d\underset{\sim}{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial u} \underset{\sim}{du} + \frac{\partial q_i}{\partial v} \underset{\sim}{dv}$$

$$d\underset{\sim}{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial u} \underset{\sim}{du} + \frac{\partial p_i}{\partial v} dv$$

sehingga

$$d\underset{\sim}{q}_i \times d\underset{\sim}{p}_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_i}{\partial v} \\ \frac{\partial p_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \underset{\sim}{du} \times \underset{\sim}{dv}$$

atau dengan notasi singkat kita tulis

$$d\underset{\sim}{q}_i \times d\underset{\sim}{p}_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} \underset{\sim}{du} \times \underset{\sim}{dv}$$

Notasi untuk determinan di ruas kanan dinamakan determinan Jacobi.
Dengan notasi ini, persamaan (158) menjadi tertuliskan sebagai

$$\iint \sum_i \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} \underset{\sim}{du} \times \underset{\sim}{dv} = \iint \sum_i \frac{\partial(Q_i,P_i)}{\partial(u,v)} \underset{\sim}{du} \times \underset{\sim}{dv}$$

yang berarti

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \frac{\partial(Q_i,P_i)}{\partial(u, v)} \qquad (159)$$

Jadi kita hendak membuktikan persamaan (159).
Dengan mengambil fungsi generasi

$$F = F(q\ P\ t)$$

yang menurut persamaan (153) berarti

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$$

dengan

$$Q_i = Q_i(q_j p_j t)$$

$$P_i = P_i(q_j p_j t)$$

kita dapatkan

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_j}{\partial u} + \sum_j \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\frac{\partial P_j}{\partial u}$$

$$= \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} + \sum_j \frac{\partial P_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j}$$

Dengan jalan yang sama, kita hitung pula $\frac{\partial p_i}{\partial v}$, $\frac{\partial q_i}{\partial u}$ dan $\frac{\partial q_i}{\partial v}$, sehingga akhirnya kita akan memperoleh

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial u} + \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \frac{q_j}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial v} + \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial q_j}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_j}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \\ & \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \end{vmatrix}$$

Harga determinan di suku pertama ruas kanan adalah

$$\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial v} = \frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial q_j}{\partial v} = 0$$

Maka suku itu dapat diganti dengan yang lain yang berharga nol juga, misalnya

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial P_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial u} & \frac{\partial P_j}{\partial u} \\ \frac{\partial P_i}{\partial v} & \frac{\partial P_j}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sehingga

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial P_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial u} & \frac{\partial P_j}{\partial u} \\ \frac{\partial P_i}{\partial v} & \frac{\partial P_j}{\partial v} \end{vmatrix} + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_j}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_j}{\partial v} \end{vmatrix}$$

yang dengan mengingat

$$Q_j = \frac{\partial F}{\partial P_j}$$

akhirnya kita peroleh

$$\sum_i \frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_j \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial u} & \frac{\partial P_j}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial v} & \frac{\partial P_j}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_j \frac{\partial(Q_j P_j)}{\partial(u,v)}$$

15. Kurung Lagrange (Lagrange Bracket)

Di pasal 14 dikemukakan bahwa tetapnya atau invariansinya integral Poincare yang dirumuskan oleh persamaan (158) berarti juga tetapnya atau invariansinya determinan Jacobi yang diberikan oleh persamaan (159), yang tak lain ialah

$$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u}\frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial Q_i}{\partial v}\right)$$

Secara singkat persamaan di atas kita tulis sebagai

$$\{u,v\}_{q,p} = \{u,v\}_{Q,P} \qquad (160)$$

Notasi dengan kurung demikian dinamakan kurung Lagrange, dan persamaan (160) mengatakan bahwa harga kurung Lagrange tak tergantung pada sistem koordinat kanonik, atau ruang fase, yang dipakai.
Dengan demikian, index q, p ataupun Q, P tidaklah perlu dibubuhkan.
Dari definisi kurung Lagrange, jelaslah bahwa

$$\{v,u\} = - \{u,v\}$$

Substitusi u dengan q_i atau q_j serta v dengan p_i atau p_j dengan mengingat bahwa q_i, q_j, p_i, p_j tak saling berkaitan, yakni

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \; ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \; ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \; ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$$

akan menghasilkan persamaan-persamaan

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{161}$$

Persamaan (161) di atas dikenal sebagai kaidah utama kurung Lagrange.

16. Kurung Poison (Poison Bracket)

Kurung Poison seolah-olah berwujud kebalikan kurung Lagrange, yaitu didefinisikan sebagai

$$\left[u,v\right] = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \right)$$

Dari definisi ini, seperti halnya dengan kurung Lagrange, akan kita dapatkan

$$\left[v,u\right] = -\left[u,v\right]$$

Begitu pula akan kita peroleh hubungan-hubungan

$$\begin{aligned} \left[q_i, q_j\right] &= 0 \\ \left[p_i, p_j\right] &= 0 \\ \left[q_i, p_j\right] &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{162}$$

yang dinamakan kaidah utama kurung Poison.
Dengan substitusi u dengan q_i ataupun p_i dan v dengan fungsi Hamilton H, persamaan Hamilton dapat ditulis dengan notasi kurung Poison sebagai

$$\dot{q}_i = \left[q_i, H\right] \quad \text{dan} \quad \dot{p}_i = \left[p_i, H\right] \tag{163}$$

Marilah sekarang kita tinjau besaran u yang merupakan fungsi q dan p. Maka variasi u terhadap t diberikan oleh

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$= u, H \qquad (164)$$

Apabila u ialah tetapan gerakan, yaitu tak tergantung waktu, maka menurut persamaan (164) ini,

$$\left[u, H \right] = 0 \qquad (165)$$

Dapat ditunjukkan bahwa apabila v juga merupakan tetapan gerakan, maka begitu pula $\left[u, v \right]$, sebagai berikut

Setelah melalui perhitungan yang panjang akan terbukti bahwa

$$\left[u, \left[v,w \right] \right] + \left[v, \left[w,u \right] \right] + \left[w, \left[u,v \right] \right] = 0$$

yang dengan mengingat $\left[v,u \right] = - \left[u,v \right]$ dapat pula ditulis sebagai

$$\left[\left[u,v \right] , w \right] = \left[u, \left[v,w \right] \right] - \left[v, \left[u,w \right] \right]$$

Substitusi w dengan H akan menghasilkan

$$\left[\left[u,v \right] , H \right] = 0$$

jikalau

$$\left[u,H \right] = 0 \quad \text{dan} \quad \left[v,H \right] = 0$$

17. Rotasi kecil dan Impuls Putar dengan Kurung Poison

Di pasal 11 telah kita bahas hal transformasi kanonik, dengan fungsi generasi F yang menentukan persamaan transformasinya.
Kita sekarang hendak merumuskan transformasi kecil. Adanya transformasi kecil yang kecilnya hendak kita nyatakan dengan ε kita pandang sebagai akibat perubahan fungsi generasi F_I yang tadinya mentransforma - sikan identik, artinya mentransformasikan kembali ke asalnya, atau secara fisis, tidak mentransformasikan.
Mengikuti pasal 11 dengan mengambil fungsi generasi

$$F_I = \sum_i q_i P_i$$

akan kita peroleh

$$P_i = \frac{\partial F_I}{\partial q_i} = P_i$$

$$Q_i = \frac{\partial F_I}{\partial P_i} = q_i$$

yakni $P_i = p_i$ dan $Q_i = q_i$, artinya secara fisis tidak ada transformasi, atau secara formalitas matematik dikatakan terjadi transformasi identik.
Dengan demikian, fungsi generasi untuk transformasi kecil dapat kita tuliskan sebagai

$$F(q,p) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon\, G(q,P)$$

Dengan fungsi generasi demikian, transformasi kecil akan diberikan oleh

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \text{atau} \quad P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Kedua persamaan ini akan menghasilkan variasi-variasi

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{166}$$

$$\delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

dengan mengingat bahwa untuk transformasi yang cukup kecil, harga $\frac{\partial G}{\partial P_i}$ kiranya tidak banyak berubah apabila P_i di dalam $\frac{\partial G}{\partial P_i}$ itu setiap kali diganti dengan p_i. Dengan kata lain, kiranya kita dapat mengganti $G(q,P)$ menjadi $G(q,p)$.

Selanjutnya, suatu besaran u yang merupakan fungsi q dan p, oleh transformasi kecil, akan bervariasi sebesar

$$\delta u = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\, \delta p_i\right)$$

yang dengan mengingat rumus (166) menjadi

$$\delta u = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\,\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\,\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)$$

$$= \varepsilon \left[u,G\right] \tag{167}$$

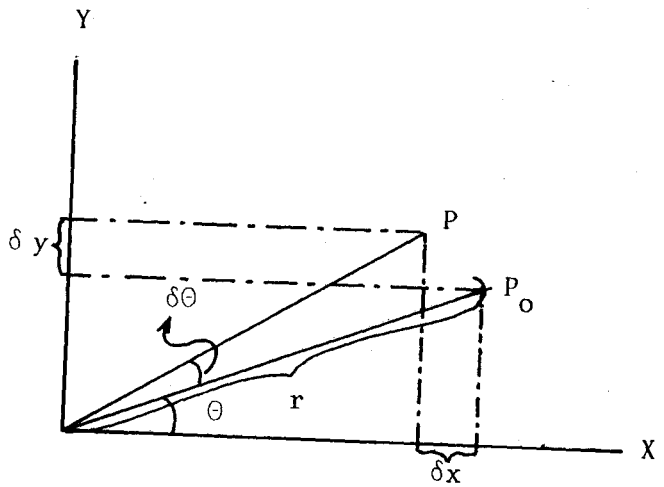
Seandainya u ialah fungsi Hamilton H, maka persamaan (167) menjadi

$$\delta H = \varepsilon \left[H,G\right]$$

yang dengan mengingat rumus (166), apabila G adalah suatu tetapan gerakan, maka $\delta H = 0$.
Jadi transformasi kecil dengan tetapan gerakan selaku fungsi generasi, tidak akan merubah fungsi Hamiltonnya.

Rotasi kecil, adalah keadaan khusus dari transformasi kecil. Kita tinjau rotasi kecil sekitar sumbu Z di dalam ruang Cartesian, dengan sudut putar kecil $\delta\Theta$. Kita perhatikan gambar III.6.

Suatu perputaran dari $P_o(x,y)$ ke $P(x + \delta x, y + \delta y)$ akan menghasilkan variasi-variasi δx dan δy yang ditentukan oleh increement sudut putar $\delta\Theta$.



Gambar III.6.
Variasi δx dan δy dalam perputaran kecil.

Dari hubungan

$$x = r \cos\Theta$$

$$y = r \sin\Theta$$

dengan mudah kita dapatkan

$$\delta x = - r \sin\Theta \, \delta\Theta = - y \, \delta\Theta \qquad (168)$$

$$\delta y = r \cos\Theta \, \delta\Theta = x \, \delta\Theta$$

Rumus variasi koordinat yang diberikan oleh persamaan (168) ini sudah tentu berlaku sama untuk sembarang vektor di dalam ruang Cartesian, sehingga untuk komponen-komponen impuls p berlaku pula

$$\delta p_x = - p_y \, \delta\Theta$$

$$\delta p_y = p_x \, \delta\Theta \qquad (169)$$

Dengan menuliskan $\delta\Theta = \varepsilon$, persamaan (168) bersama persamaan (166) mengisyaratkan bahwa G adalah sedemikian hingga

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = -y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial G}{\partial p_y} = x \qquad (170)$$

sedangkan persamaan (169) bersama persamaan (170) memberikan petunjuk bahwa G memenuhi hubungan

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p_y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -p_x \qquad (171)$$

Dari persamaan (170) dan persamaan (171) di atas, kita dapat menarik kesimpulan bahwa

$$G = xp_y - yp_x$$

dapat diambil selaku fungsi generasinya.
Di lain pihak, ruas kanan persamaan di atas tak lain ialah L_z yaitu komponen Z impuls putar L yang diberikan oleh

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Jadi untuk perputaran kecil sekeliling sumbu Z dengan increement sudut putar $\delta\Theta$, dari rumus (167) berlaku hubungan

$$\delta u = \delta\Theta\left[u,\ L_z\right] \tag{172}$$

Lebih lanjut, untuk sembarang vektor F, dengan menguraikan

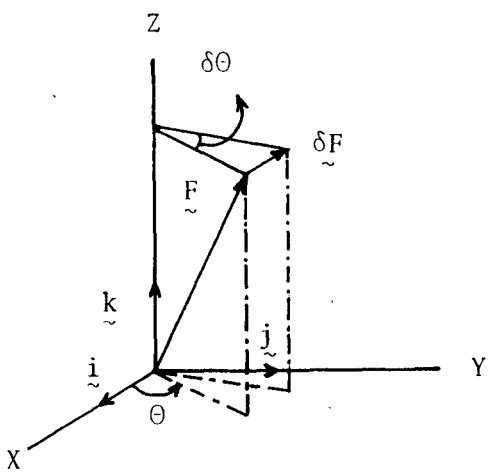
$$\underset{\sim}{F} = F_x\underset{\sim}{i} + F_y\underset{\sim}{j} + F_z\underset{\sim}{k}$$

persamaan (172) akan menghasilkan hubungan

$$\delta\underset{\sim}{F} = \delta\,\Theta\left[\underset{\sim}{F},\ L_z\right] \tag{173}$$

Di lain pihak, dengan pertolongan gambar III.7 terlihat bahwa

$$\delta\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{k}\ \delta\Theta \times \underset{\sim}{F} \tag{174}$$



Gambar III.7.
Variasi vektor $\underset{\sim}{F}$ oleh perputaran kecil pada sumbu Z.

Jadi kedua persamaan (173) dan (174) menunjukkan bahwa

$$\left[\underset{\sim}{F},\ L_z\right] = \underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{F} \tag{175}$$

Untuk perputaran sekeliling $\underset{\sim}{N}$, dengan mengingat

$$\left[\underset{\sim}{F},\ \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{N}\right] = \left[\underset{\sim}{F},\ L_x N_x + L_y N_y + L_z N_z\right]$$

persamaan (175) menjadi

$$\left[\underset{\sim}{F},\ \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{N}\right] = \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{F} \tag{176}$$

Dengan mengingat bahwa

$$\frac{\partial F^2}{\partial x} = 2F \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F^2}{\partial p_x} = 2F \frac{\partial F}{\partial p_x} \quad \text{serta} \quad F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}$$

maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}\left[\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F},\ \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{N}\right] &= 2\underset{\sim}{F} \cdot \left[\underset{\sim}{F},\ \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{N}\right] \\ &= 2\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{F} \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi

$$\left[F^2,\ \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{N}\right] = 0 \tag{177}$$

Dengan sumstitusi $\underset{\sim}{F}$ dengan $\underset{\sim}{L}$ serta menguraikan $\underset{\sim}{L}$ menjadi

$$\underset{\sim}{L} = L_x \underset{\sim}{i} + L_y \underset{\sim}{j} + L_z \underset{\sim}{k}$$

persamaan (175) memberikan

$$\underset{\sim}{i}\left[L_x, L_z\right] + \underset{\sim}{j}\left[L_y, L_z\right] + \underset{\sim}{k}\left[L_z, L_z\right] = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}$$

$$= -L_y \underset{\sim}{i} + L_x \underset{\sim}{j}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\left[L_x, L_z\right] &= -L_y \\ \left[L_y, L_z\right] &= L_x \\ \left[L_z, L_z\right] &= 0\end{aligned} \tag{178}$$

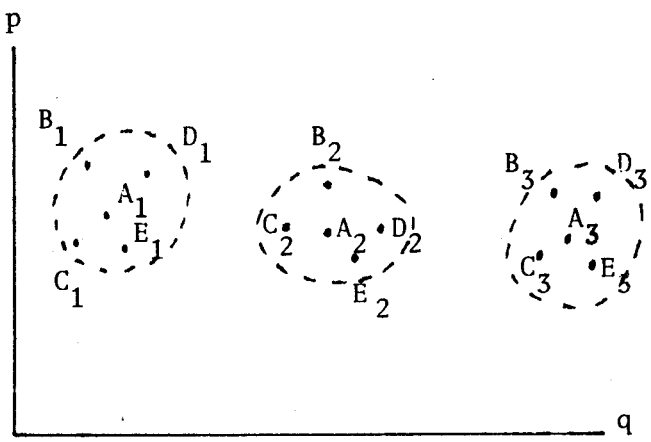
Adapun substitusi F^2 dengan L^2 ke persamaan (177) menghasilkan

$$\left[L^2,\ L_z\right] = 0 \tag{179}$$

Hal yang menarik perhatian ialah persamaan-persamaan (178) dan (179) memperlihatkan adanya analoogi antara komutator dalam mekanika kwantum dengan kurung Poison dalam mekanika klasik ini.
Dalam mekanika kwantum, terhadap ruas kanan persamaan (178) dikalikan dengan faktor $i \frac{h}{2\pi}$.

18. Teorema Liouville

Kita telah mempelajari bahwa keadaan sistem mekanis dapat dilukiskan sebagai suatu titik di dalam ruang fase berdimensi 2n.
Perubahan keadaan sistem itu terhadap waktu akan terlukiskan sebagai gerakan titik tersebut di dalam ruang fase. Gerakan titik itu harus sedemikian rupa hingga persamaan Hamilton dipenuhi. Seandainya kita mempunyai banyak sekali sistem mekanis sejenis, maka himpunan sistem-sistem itu akan terlukiskan sebagai himpunan titik-titik yang semuanya bergerak di dalam ruang fase.
Untuk arus titik-titik itu Liouville mengatakan bahwa kerapatan titik di sekitar setiap titik adalah tetap.
Untuk jelasnya kita perhatikan gambar III.8.



Gambar III.8.
Invariansi kerapatan titik di dalam ruang fase.

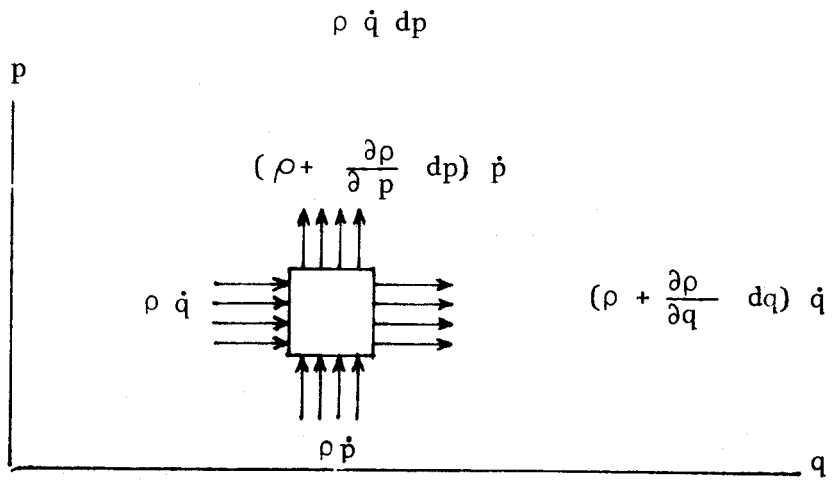
Berubahnya keadaan titik-titik ABCD dan seterusnya dari saat t_1 ke saat t_2 dilukiskan oleh gerakan titik-titik tersebut dari A_1 ke A_2, dari B_1 ke B_2, dan seterusnya. Maka menurut Liouville, kerapatan titik di sekitar A_1 adalah sama dengan kerapatan titik di sekitar A_2 ; begitu pula untuk titik-titik lainnya. Dengan kerapatan di sekitar titik A itu ρ_A, pernyataan di atas dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{d\,\rho_A}{dt} = 0$$

Kita tinjau elemen volume dpdq di sekitar titik A yang bergerak itu. Pada saat t_2, perubahan kerapatan titik terhadap waktu di A_2 adalah

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\ dp\ dq) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dpdq$$

Perubahan kerapatan di A_2 itu disebabkan oleh karena banyaknya titik-titik yang masuk ke elemen volume itu persatuan waktu tidak sama dengan banyaknya titik-titik yang mengalir ke luar persatuan waktu.
Apabila yang ke luar lebih banyak daripada yang masuk, maka kerapatannya menjadi berkurang.
Dengan pertolongan gambar III.9 kita lihat bahwa banyaknya titik yang masuk ke elemen volume pada arah sumbu q, diberikan oleh



Gambar III.9.
Arus titik di dalam ruang fase.

dengan $\rho\dot{q}$ tak lain ialah rapat arus titik sepanjang arah sumbu q di sebelah kiri dinding elemen volume, sedangkan yang ke luar dari elemen volume itu adalah

$$-\left\{\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho\ \dot{q})\ dq\right\} dp$$

Dengan demikian resultante yang ke luar dari elemen volume pada arah sumbu q adalah

$$\left\{\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\ dq\right\} dp - \rho\dot{q}\ dp = \frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\ dq\ dp$$

Dengan cara yang sama akan kita peroleh arus titik pada arah sumbu p

$$\left\{\rho\dot{p} + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\ dp\right\}\ dq - \rho\dot{p}\ dq = \frac{\partial}{\partial p}(\rho\ \dot{p})\ dp\ dq$$

sehingga resultante yang ke luar dari elemen volume pada kedua arah adalah

$$\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\ dq\ dp + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\ dp\ dq = \{\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{p}) + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\}\ dq\ dp$$

Pada kenyataannya arus titik itu adalah pada segala arah; namun kita selalu dapat menguraikannya menjadi komponen-komponen pada arah sumbu-sumbu q dan p.
Jadi kita dapat mengatakan bahwa berkurangnya titik-titik per satuan waktu di dalam elemen volume dp dq di A_2 adalah

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\ dpdq = \{\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q}) + \frac{\partial}{\partial p}(\rho\dot{p})\}\ dpdq$$

yang lalu menghasilkan perubahan kerapatan titik di A_2 per satuan waktu

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \dot{q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p} + \rho(\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p})$$

Selanjutnya dengan mengingat persamaan Hamilton (146), suku ke tiga ruas kanan memberikan

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial q}(\frac{\partial H}{\partial p}) - \frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial H}{\partial q}) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q} \\ &= 0\end{aligned}$$

sehingga kita dapatkan

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \dot{q}\frac{\partial\rho}{q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p} \qquad (180)$$

Adapun perubahan kerapatan per satuan waktu di sekitar A yang bergerak itu sama dengan perubahan kerapatan per satuan waktu sesaat di tempat A sedang berada (misalnya di A_2) ditambah dengan perubahan kerapatan per satuan waktu sepanjang arah bergerak A. Atau kalau dirumuskan

$$\frac{d\rho_A}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho_A}{\partial t} \qquad (181)$$

Akan tetapi perubahan kerapatan di sekitar A karena bergeraknya A diberikan oleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_A}{\partial t} &= \frac{\partial\rho}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt} \\ &= \dot{q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p}\end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan (180) dan persamaan (181) menghasilkan

$$\frac{d\rho_A}{dt} = 0 \qquad (182)$$

yang tak lain ialah perumusan teorema Liouville.
Teorema Liouville ini merupakan bagian yang berperanan penting dalam mekanika statistik dan termodinamika.

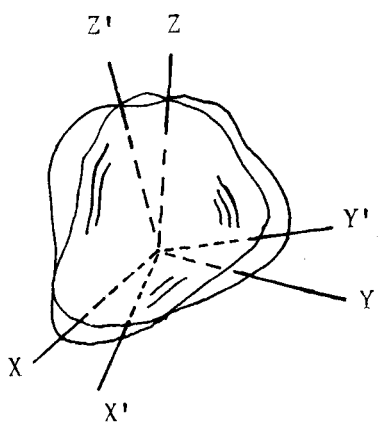
IV. MEKANIKA BENDA TEGAR

1. Pendahuluan

Benda tegar (rigid body) adalah sistem materi yang massanya terterdistribusi secara kontinyu dan bagian-bagiannya berjarak tetap satu sama lain, sehingga konfigurasinya atau bentuknya adalah tetap. Jadi kemungkinan gerakannya pada umumnya adalah translasi (bergeser) sambil rotasi (berputar) dengan sumbu rotasi yang boleh jadi berubah-ubah letak dan orientasinya (arahnya). Rotasi pada suatu titik pada hakekatnya adalah rotasi pada sumbu yang melalui titik itu dengan orientasi sumbu yang berubah-ubah. Seperti halnya dengan sistem titik materi, kita kenal definisi yang sama pula untuk titik berat dan lain-lain, kecuali bahwa untuk benda tegar penjumlahan sigmanya diganti dengan integral, sebagaimana dinyatakan oleh persamaan (50b) dan persamaan (68).

2. Transformasi Orthogonal

Perubahan orientasi benda tegar kiranya dapat dinyatakan oleh perrubahan orientasi sumbu-sumbu koordinat Cartesian yang kita tambatkan pada benda tegar sehingga berputar mengikuti perputaran benda tegar tersebut. Sistem koordinat dengan sumbu-sumbu koordinat X', Y', Z' dan berpusatkan 0' di dalam benda ini hendak kita sebut sistem koordinat benda S'.
Adapun suatu sistem koordinat yang sumbu-sumbunya X, Y, Z tetap, terhadap mana perputaran sumbu-sumbu koordinat X', Y', Z' hendak ditinjau, hendak kita sebut sistem koordinat ruang S dengan pusat koordinat 0, misalnya.
Marilah kita perhatikan gambar IV.1.



Gambar IV.1.
Rotasi sistem koordinat benda beserta rotasi benda.

Perubahan orientasi benda tegar dapat dinyatakan oleh berputarnya sumbu-sumbu X', Y', Z' di dalam benda tegar, terhadap sumbu-sumbu X, Y, Z yang tetap itu.
Untuk mudahnya, kita pilih sistem-sistem koordinat S' dan S yang mula-mula berimpitan satu sama lain. Maka perubahan orientasi itu misalnya sedemikian rupa hingga sumbu X' lalu membuat sudut α dengan sumbu X, sumbu Y' lalu membuat sudut β dengan sumbu Y, dan sumbu Z' lalu membuat sudut γ dengan sumbu Z.
Secara aljabar, perputaran sumbu-sumbu koordinat X', Y', Z' terhadap sumbu-sumbu X, Y, Z dapat dinyatakan sebagai transformasi sistem koordinat X, Y, Z.
Transformasi demikian, yakni yang sedemikian rupa hingga sistem koordinat yang orthogonal, artinya tegak lurus satu sama lain, tetap orthogonal, dinamakan transformasi orthogonal.
Hendak kita selidiki sekarang rumus-rumus dan sifat-sifat transformasi orthogonal tersebut.
Misalkan sepanjang sumbu-sumbu koordinat X, Y, Z di dalam sistem koordinat ruang S kita sangkutkan vektor-vektor satuan berturut-turut e_1, e_2, e_3, serta begitu pula sepanjang sumbu-sumbu koordinat X', Y', Z' di dalam sistem koordinat benda S' kita sangkutkan vektor-vektor satuan e_1', e_2', e_3'.

Maka untuk suatu titik P di dalam sistem koordinat ruang S dapat kita tulis vektor koordinat r sebagai

$$\underset{\sim}{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Sedangkan terhadap sistem koordinat benda S' vektor koordinat titik P akan tertuliskan sebagai

$$\underset{\sim}{r}' = x'e_1' + y'e_2' + ze_3'$$

dengan sudah tentu selalu

$$\underset{\sim}{r}' = \underset{\sim}{r}$$

sebab O' selalu berimpit dengan O.
Jadi berlakulah hubungan

$$x'e_1' + y'e_2' + z'e_3' = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Dari persamaan ini hubungan antara x', y', z' dengan x, y, z tidaklah mudah dilihat. Maka sebelumnya kita perlu mencari hubungan antara e_1', e_2', e_3' dengan e_1, e_2, e_3, hubungan mana ditentukan oleh suatu fungsi transformasi yang mentransformasikan sistem S ke sistem S'.
Hubungan demikian kita peroleh sebagai berikut.
Cosinus sudut antara e_1', dengan e_1; e_2; e_3 berturut-turut ialah $e_1'.e_1$; $e_1'.e_2$; $e_1'.e_3$; dan demikian pula untuk yang lain.
Maka dilihat dari sistem S, vektor-vektor e_1', e_2' dan e_3' akan terbaca sebagai

$$e_1' = (e_1'.e_1)\, e_1 + (e_1'.e_2)\, e_2 + (e_1'.e_3)\, e_3$$

$$e_2' = (e_2'.e_1)\, e_1 + (e_2'.e_2)\, e_2 + (e_2'.e_3)\, e_3$$

$$e_3' = (e_3'.e_1)\, e_1 + (e_3'.e_2)\, e_2 + (e_3'.e_3)\, e_3.$$

atau misalnya

$$\begin{aligned} e_1' &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ e_2' &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 \\ e_3' &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned} \tag{183}$$

Jadi transformasi dari S ke S' adalah linear dan ditentukan oleh matrix transformasi

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

menurutkan

$$e' = Ae \tag{184}$$

dengan e dan e' adalah vektor-vektor yang komponen-komponennya adalah vektor-vektor satuan e_1, e_2, e_3 dan e_1', e_2', e_3'.

Sebagaimana dikatakan di atas, transformasi ini adalah transformasi orthogonal yang sifat-sifatnya akan kita rumuskan berikut ini.

Sifat-sifat orthonormal e_1, e_2, e_3, yaitu sifat bahwa $e_1 \perp e_2 \perp e_3$ dan panjang e_1, e_2, e_3 masing-masing sama dengan satu, dapat dirumuskan dengan hasil kali skalar vektor-vektor satuan

$$e_i.e_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{185}$$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{bilamana } i = j \\ &= 0 \quad \text{bilamana } i \neq j \end{aligned}$$

Hal yang sama berlaku juga untuk e_1', e_2' dan e_3' yakni

$$e_i'.e_j' = \delta_{ij} \tag{186}$$

Selanjutnya dengan menuliskan persamaan (183) secara singkat sebagai

$$e_i' = \sum_k a_{ik}\, e_k \tag{187}$$

persamaan (186) menjadi $\left(\sum_k a_{i\,k}\, e_k\right) \cdot \left(\sum_l a_{j\,l}\, e_l\right) = \delta_{ij}$

yang bersama persamaan (185) menghasilkan

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \qquad (188)$$

yang berarti misalnya

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$$

dan

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$
$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

Dengan menuliskan

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

dengan a_1, a_2 dan a_3 adalah vektor-vektor

$$a_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$$
$$a_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})$$
$$a_3 = (a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33})$$

maka persamaan (186) mengatakan pula bahwa vektor-vektor a_1, a_2, dan a_3 adalah orthonormal, seperti halnya e_1, e_2, e_3 maupun e_1', e_2', e_3'. Sifat penting yang lain dari matrix A ialah bahwa determinannya berharga 1. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Dari persamaan linear simultan (183), sebaliknya e dapat pula dinyatakan sebagai kombinasi linear dari e' yakni

$$e = A^{-1} e'$$

dengan A^{-1} selaku matrix inversinya A yang komponen-komponennya misalnya ialah a_{ij}^{-1}, sehingga persamaan (187) memberikan

$$e_i' = \sum_k a_{ik}^{-1} e_k$$

Demikianlah maka kita dapat menuliskan

$$e_i' = \sum_j a_{ij} e_j$$

$$= \sum_j a_{ij} \sum_k a_{jk}^{-1} e_k'$$

$$= \sum_j \sum_k a_{ij} a_{jk}^{-1} e_k'$$

Akan tetapi komponen-komponen e' (begitu juga e) tidak bergantungan satu sama lain.
Jadi e_i' bukanlah merupakan kombinasi linear dari e_k'.
Maka persamaan di atas pasti berarti

$$\sum_j a_{ij} a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Tetapi di lain pihak kita mempunyai

$$\sum_j a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$

Jadi

$$a_{jk}^{-1} = a_{kj}$$

sedangkan a_{kj} adalah transposenya elemen a_{jk}, yakni

$$a_{kj} = a_{jk}'$$

sehingga

$$a_{jk}^{-1} = a_{jk}'$$

atau

$$A^{-1} = A'$$

Yaitu inversinya sama dengan transposenya.
Dengan mengalikan masing-masing ruas dengan A, persamaan di atas lalu menghasilkan

$$AA^{-1} = AA'$$

yakni

$$I = AA' \quad \text{atau} \quad AA' = I \tag{189}$$

jika I adalah matrix satuan yaitu

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Menurut aljabar determinant, berlaku hubungan

$$|AB| = |A| \, |B|$$

sehingga persamaan di atas memberikan

$$|AA'| = |A|\,|A'| = |I| = 1$$

Akan tetapi

$$|A'| = |A|$$

Jadi

$$|A|^2 = 1$$

yang berarti

$$|A| = \pm 1$$

Adapun $|A| = -1$, bersangkutan dengan refleksi, bukannya rotasi, sebab seandainya

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

maka

$$|A| = -1$$

Tetapi matrix A demikian bersangkutan dengan refleksi sumbu Y, karena memberikan

$$e_1' = e_1$$

$$e_2' = -e_2$$

$$e_3' = e_3$$

Hal yang sama berlaku pula untuk

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{dan} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

yang memberikan refleksi sumbu X dan sumbu Z.
Jadi yang bersangkutan dengan transformasi orthogonal adalah matrix A yang mempunyai sifat

$$|A| = 1 \qquad (190)$$

3. Teorema Euler

Pada pembahasan transformasi orthogonal, kita tinjau perubahan orientasi benda tegar yang dinyatakan oleh perputaran sistem koordinat benda S' di dalam benda tegar terhadap sistem koordinat ruang S yang tetap.

Maka Euler mengatakan bahwa untuk setiap transformasi orthogonal selalu dapat ditemukan satu sumbu putar sesaat yang bersangkutan dengan transformasi itu.
Sumbu putar adalah garis yang tidak ikut terputar, yakni berarti titik-titik padanya mempunyai koordinat-koordinat yang tidak berubah terhadap sistem koordinat ruang S yang tetap itu. Oleh berputarnya benda tegar, setiap titik pada benda tegar, (kecuali titik-titik pada sumbu putar) akan mengalami perubahan koordinat-koordinatnya terhadap sistem koordinat ruang S seperti halnya dengan vektor-vektor e_1', e_2', e_3' yang ada di dalam sistem koordinat benda S', yaitu menurutkan persamaan transformasi.

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \tag{191}$$

dengan x', y', z' ialah koordinat-koordinat di dalam S' sebelum maupun sesudah perputaran, sedangkan x, y, z, adalah koordinat - koordinatnya di dalam S sesudah perputaran. Seperti halnya dengan persamaan (184), begitu pula persamaan (191) dapat disingkat menjadi

$$\underset{\sim}{r}' = A\,\underset{\sim}{r} \tag{192}$$

Dalam hal ini transformasi e diberikan oleh $e' = A'e$
Jadi untuk titik di sumbu putar, berlaku hubungan

$$A\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}$$

Dalam aljabar matrix, r disebut eigenvector matrix A yang eigenvaluenya adalah 1.
Dengan perkataan lain, dalam bahasa aljabar matrix, teorema Euler mengatakan bahwa eigenvalue dari eigenvector matrix orthogonal adalah 1. Hal ini hendak kita buktikan sebagai berikut.
Persamaan eigenvalue pada umumnya ialah

$$A\,\underset{\sim}{r} = \lambda\,\underset{\sim}{r} \tag{193}$$

yakni

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= \lambda y \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= \lambda z \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\,x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)\,y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan simultan dengan 3 variabel x, y, z ini dapat dipecahkan hanya apabila determinan

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yang menghasilkan

$$\lambda^3 - \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(a_{11}\, a_{22} + a_{22}\, a_{33} + a_{11}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32} + \ldots\ldots\ldots) + (a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + \ldots\ldots\ldots) = 0$$

Misalkan akar persamaan di atas adalah λ_1, λ_2, λ_3.
Maka persamaan di atas sama dengan persamaan

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$$

atau

$$\lambda^3 - \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \ldots\ldots) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$

yang dengan mencocokkannya dengan persamaan di atas kita dapatkan

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

yaitu sama dengan trace (spur) atau jumlah diagonal matrix A, dan

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + \ldots\ldots\ldots$$
$$= |A|$$

Jadi mengingat persamaan (189) untuk matrix transformasi orthogonal, berlaku

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = 1 \qquad (194)$$

Di lain pihak, dari persamaan (192), dengan mengambil transpose conjugatenya, kita dapatkan

$$(Ar)^+ = \lambda^*\, r^+$$

yakni

$$r^+ A^+ = \lambda^*\, r^+$$

Tanda + dimaksudkan untuk notasi transpose conjugate yakni sesudah ditransposekan - lalu diambil conjugate komplex-nya, sedang tanda * adalah notasi untuk conjugate komplex.
Oleh karena A adalah matrix rieel, maka

$$A^+ = A'$$

sehingga

$$r^+ A' = \lambda^*\, r^+$$

Dengan mengalikan Ar di sebelah kanan masing-masing ruas dan mengingat pula sifat matrix orthogonal persamaan (189) serta persamaan (193) kita peroleh

$$r^{+}A'Ar = \lambda^{*}\, r^{+}\, Ar$$

atau

$$r^{+}r = \lambda^{*}\, r^{+}\, \lambda r$$
$$= \lambda^{*}\ \lambda r^{+}r$$

yang berarti

$$\lambda^{*}\lambda = 1$$

Ini berarti bahwa λ berbentuk

$$\lambda = e^{\pm i\varphi}$$

Jadi kemungkinan harga-harga λ_1, λ_2, λ_3 menurut uraian di atas serta mengingat persamaan (194) adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (195)$$

atau boleh jadi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{i\varphi} \\ \lambda_2 &= e^{i\varphi} \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (196)$$

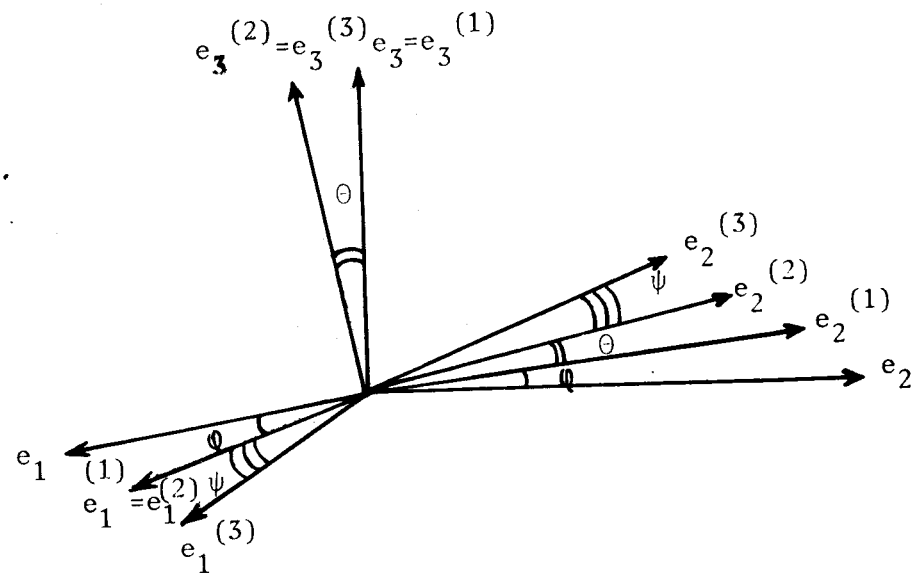
Persamaan (195) tidaklah cocok dengan kenyataan, sebab $\lambda = -1$ berarti refleksi, sedangkan rotasi takkan menghasilkan refleksi. Jadi persamaan (196) yang harus diambil sebagai penyelesaiannya.
Bahwa $\lambda_3 = 1$ menunjukkan adanya suatu sumbu putar tertentu dalam transformasi orthogonal tersebut, dan ini membuktikan kebenaran teorema Euler.

4. Sudut-sudut Euler

Di pasal 2, transformasi orthogonal ditentukan oleh harga - harga elemen matrix a_{ij} berdimensi 3 x 3 ; jadi ditentukan oleh 9 parameter. Namun sebenarnya ke 9 parameter itu tidak bebas satu sama lain, sebab dibatasi oleh hubungan parameter-parameter menurutkan persamaan (188) yang dapat diuraikan menjadi 6 buah persamaan

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$
$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$
$$a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$$

Ke 6 persamaan ini memberikan penyelesaian untuk sebanyak 6 parameter. Jadi sebenarnya parameter bebasnya hanya 9 - 6 = 3 buah saja.
Maka Euler mempertimbangkan untuk menuliskan elemen-elemen matrix orthogonal itu sedemikian rupa hingga hanya didapat 3 parameter selaku variabel bebasnya.
Dengan memikirkan bahwa setiap rotasi pada suatu sumbu dapat dicapai pula dengan 3 langkah dengan masing-masing langkah adalah suatu rotasi pada sumbu koordinat, maka tentunya sudut-sudut putar pada masing-masing langkah boleh dipakai selaku variabel bebas.
Kita perhatikan gambar IV.2.



Gambar IV.2.
Sudut-sudut Euler dalam langkah-langkah rotasi.

Untuk ke 3 langkah tersebut diambil langkah-langkah sebagai berikut.
Mula-mula dengan sumbu bervektor satuan e_3 tetap, e_1 dan e_2 diputar sesudut putar φ ke $e_1^{(1)}$ dan $e_2^{(1)}$.

Kemudian dengan $e_1^{(1)}$ tetap, $e_2^{(1)}$ dan $e_3^{(1)} = e_3$ diputar sesudut Θ ke $e_2^{(2)}$ dan $e_3^{(2)}$.

Akhirnya dengan $e_3^{(2)}$ tetap, $e_1^{(2)} = e_1^{(1)}$ dan $e_2^{(2)}$ diputar dengan sudut putar sebesar Ψ ke $e_1^{(3)}$ dan $e_2^{(3)}$.

Dengan demikian, untuk langkah pertama berlaku

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi \\ e_2^{(1)} &= -e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi \\ e_3^{(1)} &= e_3 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

dan untuk langkah kedua berlaku

$$\begin{aligned} e_1^{(2)} &= e_1^{(1)} \\ e_2^{(2)} &= e_2^{(1)} \cos\Theta + e_3^{(1)} \sin\Theta \\ e_3^{(3)} &= -e_2^{(1)} \sin\Theta + e_3^{(1)} \cos\Theta \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \\ e_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

sedangkan untuk langkah terakhir, berlaku

$$\begin{aligned} e_1^{(3)} &= e_1^{(2)} \cos\Psi + e_2^{(2)} \sin\Psi \\ e_2^{(3)} &= -e_1^{(2)} \sin\Psi + e_2^{(2)} \cos\Psi \\ e_3^{(3)} &= e_3^{(2)} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} e_1^{(3)} \\ e_2^{(3)} \\ e_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \\ e_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

sehingga resultante ke 3 langkah tersebut memberikan

$$\begin{pmatrix} e_1^{(3)} \\ e_2^{(3)} \\ e_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

yang lalu menghasilkan

$$a_{11} = \cos\varphi\cos\Psi - \sin\varphi\cos\Theta\ \sin\Psi$$
$$a_{12} = \cos\varphi\sin\Psi + \sin\varphi\cos\Theta\ \cos\Psi$$
$$a_{13} = \sin\varphi\sin\Theta$$
$$a_{21} = -\sin\varphi\cos\Psi - \cos\varphi\cos\Theta\ \sin\Psi$$
$$a_{22} = -\sin\varphi\sin\Psi + \cos\varphi\cos\Theta\ \cos\Psi$$
$$a_{23} = \cos\varphi\ \sin\Theta$$
$$a_{31} = \sin\Theta\sin\Psi$$
$$a_{32} = -\sin\Theta\cos\Psi$$
$$a_{33} = \cos\Theta$$

Sudut-sudut φ, Θ, dan Ψ yang merupakan variabel-variabel bebas dalam matrix transformasi di atas dikenal sebagai sudut-sudut Euler.

5. Parameter Cayley - Klein

Seperti halnya dengan Euler, begitu pula Klein hendak menyatakan matrix transformasi dengan elemen-elemen yang mengandung 3 variabel bebas saja.
Untuk mereduksi 9 parameter elemen matrix menjadi 3 variabel bebas, Klein berpaling ke matrix komplex. Dengan matrix komplex, setiap elemen akan berisi 2 variabel yakni 1 untuk bagian rieelnya dan 1 untuk bagian imaginairnya. Dengan demikian matrix transformasi yang tadinya berdimensi 3 x 3 dapat disederhanakan menjadi matrix komplex berdimensi 2 x 2.
Antara matrix rieel dan matrix komplex memang ada analoogi, yakni kalau dalam aljabar matrix rieel, sifat simetri matrix rieel tidak berubah di bawah transformasi orthogonal, maka dalam aljabar matrix komplex, sifat Hermitian suatu matrix komplex tidak berubah di bawah transformasi Unitair (Unitary transformation). Maka dipilihlah suatu matrix Hermitian berdimensi 2 x 2 yang mengandung 3 variabel bebas x, y, z, di dalam apa yang disebut ruang spinor, yang menyatakan vektor di dalam sistem koordinat Cartesian berdimensi 3.
Untuk matrix Hermitian tersebut dipilihlah yang berbentuk

$$H = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \qquad (198)$$

Adapun selaku matrix Unitairnya yang mentransformasikan matrix Hermitian secara Unitair, misalnya dapat dituliskan sebagai

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} \tag{199}$$

Analoog dengan sifat orthonormal matrix transformasi orthogonal A yang dinyatakan oleh persamaan (188), matrix Unitair di atas mempunyai sifat orthonormal menurutkan kaidah $UU^{+} = U^{+}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, yakni

$$\begin{array}{llll} \alpha * \alpha & + & \beta * \beta & = 1 \\ \partial * \partial & + & \delta * \delta & = 1 \\ \alpha * \partial & + & \beta * \delta & = 0 \\ \alpha\, \partial^{*} & + & \beta\delta * & = 0 \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{llll} \alpha^{*} \alpha & + & {}^{*} & = 1 \\ \beta^{*} \beta & + & \delta^{*} \delta & = 1 \\ \alpha^{*} \beta_{*} & + & {}^{*} \delta & = 0 \\ \alpha\ \beta_{*} & + & \delta & = 0 \end{array} \tag{200}$$

Dari syarat orthonormalitas persamaan (200) ini diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \alpha * \alpha &= \delta * \delta \\ \partial * \partial &= \beta * \beta \end{aligned} \tag{201}$$

Selanjutnya seperti halnya syarat orthogonalitas persamaan (190) dikehendaki pula

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{vmatrix} = 1 \tag{202}$$

Dari persamaan (200) dan persamaan (202) dapatlah dipilih

$$\begin{aligned} \partial &= -\beta^{*} \\ \delta &= \alpha^{*} \end{aligned}$$

Dengan pemilihan demikian, persamaan transformasi Unitair yang menterjemahkan transformasi orthogonal dari (x, y, z) ke (x', y', z'), adalah sedemikian rupa hingga

$$\begin{aligned} U\,H\,U^{+} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\partial & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{203}$$

Dengan menyelesaikan perkalian ke 3 matrix, persamaan (203) di atas memberikan hubungan antara x', y', z' dengan x, y, z sebagai

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \partial^2 + \delta^2 - \beta^2)x + \tfrac{1}{2}i(\partial^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2)y + (\partial\delta - \alpha\beta)z \\ y' &= \tfrac{1}{2}i(\alpha^2 + \partial^2 - \beta^2 - \delta^2)x + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \partial^2 + \beta^2 + \delta^2)y - i(\alpha\beta + \partial\delta)z \\ z' &= (\beta\delta - \alpha\partial)x + i(\alpha\partial + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\partial)z \end{aligned}$$

Dengan demikian elemen-elemen matrix A sekarang ternyatakan dalam variabel-variabel α, β, ∂, dan δ, yakni

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \partial^2 + \delta^2 - \beta^2) & ; & \frac{1}{2}i\,(\partial^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & ; & -\partial\delta - \alpha\beta \\ \frac{1}{2}i(\alpha^2 + \partial^2 - \beta^2 - \delta^2) & ; & \frac{1}{2}\,(\alpha^2 + \partial^2 + \beta^2 + \delta^2) & ; & -i\,(\alpha\beta + \partial\delta) \\ \beta\delta - \alpha\partial & ; & i(\alpha\partial + \beta\delta) & ; & \alpha\delta + \beta\partial \end{pmatrix} \quad (204)$$

Adapun hubungan antara parameter-parameter Cayley-Klein α, β, ∂, δ, dengan sudut-sudut Euler φ, Θ, Ψ, pada dasarnya dapat diperoleh dengan menyamakan persamaan (204) dengan matrix di persamaan (197). Tetapi sayang penyelesaian aljabarnya dengan cara ini sangat berkepanjangan. Cara yang lebih sederhana ialah dengan melalui langkah - langkah rotasi pada perumusan sudut-sudut Euler di pasal 4. Dari langkah pertama, kita tulis

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y^{(1)} &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}$$

yang lalu memberikan

$$\begin{aligned} x^{(1)} + iy^{(1)} &= (x + iy)\, e^{-i\varphi} \\ x^{(1)} - iy^{(1)} &= (x - iy)\, e^{i\varphi} \end{aligned}$$

yang dengan membandingkannya dengan hasil manipulasi dari persamaan (203), kita dapatkan

$$\begin{aligned} \delta &= e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \\ \alpha &= e^{\frac{1}{2}i\varphi} \\ \beta &= 0, \\ \partial &= 0 \end{aligned}$$

sehingga di dalam ruang spinor, langkah rotasi pertama itu ternyatakan oleh matrix komplex dimensi 2 x 2

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \end{pmatrix} \quad (205)$$

Untuk langkah rotasi yang kedua,

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x \\ y^{(2)} &= y \cos\Theta + z \sin\Theta \\ z^{(2)} &= -y \sin\Theta + z \cos\Theta \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

kita terpaksa membandingkan elemen-elemen matrix rotasinya dengan elemen-elemen matrix pada persamaan (204) yang menghasilkan

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \partial^2 + \delta^2 - \beta^2) &= 1 \\ \tfrac{1}{2}i(\alpha^2 + \partial^2 - \beta^2 - \delta^2) &= 0 \\ \beta\delta - \alpha\partial &= 0 \\ \tfrac{1}{2}i(\partial^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) &= 0 \\ \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \partial^2 + \beta^2 + \delta^2) &= \cos\Theta \end{aligned}$$

dst.

Setelah manipulasi aljabar atas persamaan-persamaan ini, kita akan memperoleh

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tfrac{1}{2}\Theta & i\sin\tfrac{1}{2}\Theta \\ i\sin\tfrac{1}{2}\Theta & \cos\tfrac{1}{2}\Theta \end{pmatrix} \qquad (206)$$

Adapun untuk langkah rotasi ketiga dengan mudah kita ikuti bentuk yang sama dengan yang pada langkah pertama hanya untuk φ kita masukkan Ψ, sebab langkah ketiga itu adalah juga rotasi pada e_3 atau sumbu Z seperti halnya dengan langkah pertama.
Jadi untuk langkah rotasi ketiga dapat kita tuliskan

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\Psi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\Psi} \end{pmatrix} \qquad (207)$$

Maka akhirnya dengan mengalikan matrix-matrix ruas kanan persamaan-persamaan (205), (206), (207) berurutan, matrix rotasi dengan sudut-sudut Euler selaku variabel-variabel yang diberikan oleh persamaan (197) di dalam ruang spinor menjadi berbentuk

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tfrac{1}{2}\Theta & i\sin\tfrac{1}{2}\Theta \\ i\sin\tfrac{1}{2}\Theta & \cos\tfrac{1}{2}\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\Psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\Psi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\Psi)}\cos\tfrac{1}{2} & ie^{\frac{1}{2}i(\varphi-\Psi)}\sin\tfrac{1}{2}\Theta \\ ie^{\frac{1}{2}i(\Psi-\varphi)}\sin\tfrac{1}{2}\Theta & e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\Psi)}\cos\tfrac{1}{2}\Theta \end{pmatrix}$$

Adalah menarik untuk diperhatikan matrix

$$H = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

yang kalau diuraikan menjadi berbentuk

$$H = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$$

Jadi matrix Hermitian H seolah-olah adalah suatu vektor di dalam sistem koordinat yang vektor-vektor satuannya sepanjang sumbu - sumbunya yakni $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ adalah matrix-matrix dimensi 2 x 2.

Dalam mekanika kwantum,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dikenal sebagai matrix-matrix Pauli yang oleh Pauli dipakai untuk menyatakan rotasi spin elektron.

Di atas telah kita pelajari, bahwa rotasi sekitar sumbu Z di dalam ruang spinor, dinyatakan oleh persamaan (205). Dengan matrix - matrix Pauli, matrix rotasi tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \tfrac{1}{2}\varphi + i \sin \tfrac{1}{2}\varphi & 0 \\ 0 & \cos \tfrac{1}{2}\varphi - i \sin \tfrac{1}{2}\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_I \cos \tfrac{1}{2}\varphi + \sigma_z \, i \sin \tfrac{1}{2}\varphi \qquad (208)$$

Sedangkan rotasi pada sumbu X yang dinyatakan oleh persamaan (206) menjadi

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \sigma_I \cos \tfrac{1}{2}\Theta + \sigma_x i \sin \tfrac{1}{2}\Theta \qquad (209)$$

Adapun untuk rotasi pada sumbu Y, yang di dalam ruang Cartesian ternyatakan oleh hubungan

$$x' = x \cos \Psi + z \sin \Psi$$
$$y' = y$$
$$z' = -x \sin \Psi + z \cos \Psi$$

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & 0 & \sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

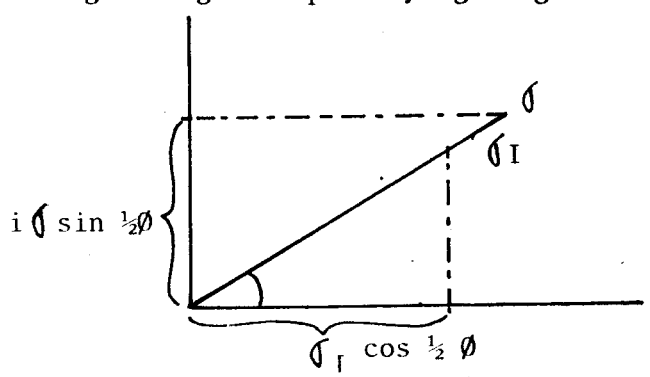
dengan cara membandingkan elemen-elemen matrixnya dengan elemen - elemen matrix persamaan (204), setelah melalui manipulasi aljabar diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tfrac{1}{2}\Psi & -\sin \tfrac{1}{2}\Psi \\ \sin \tfrac{1}{2}\Psi & \cos \tfrac{1}{2}\Psi \end{pmatrix}$$
$$= \sigma_I \cos \tfrac{1}{2}\Psi + i \sigma_y \sin \tfrac{1}{2}\Psi \qquad (210)$$

Sampai di sini kita perhatikan bahwa persamaan-persamaan (208), (209), dan (210) adalah sebentuk, sehingga secara umum kita dapat merumuskan, untuk rotasi sekitar suatu sumbu

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \partial & \delta \end{pmatrix} = \sigma_I \cos \tfrac{1}{2}\phi + i \sigma \sin \tfrac{1}{2}\phi \qquad (211)$$

Perumusan persamaan (203) ini mirip dengan pernyataan koordinat suatu titik di dalam diagram Argand seperti yang tergambar di gambar IV.3.



Gambar IV.3.
Rotasi di dalam ruang spinor.

Rotasi sebesar $\emptyset$ di dalam ruang Cartesian akan ter-terjemahkan sebagai rotasi sebesar $\frac{1}{2}\emptyset$ di dalam diagram Argand yang lalu disebut ruang spinor karena bersangkutan dengan rotasi spin ; demikianlah maka rotasi 2π di dalam ruang Cartesian yakni yang memutar ke posisi semula kembali, di dalam ruang spinor akan ternyatakan sebagai rotasi π, yakni rotasi $\frac{1}{2}$ jalan sebelum kembali ke posisi semula. Atas dasar pemikiran inilah maka diketemukan bilangan kwantum spin untuk elektron sebesar $\pm \frac{1}{2}$. Hal lain yang juga menarik perhatian, ialah hasil manipulasi

$$HH^* = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x^2+y^2+z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)\, \sigma_I$$

yang berarti bahwa H seolah-olah bertindak selaku vektor yang panjangnya

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Lagi pula sesudah mengalami transformasi Unitair, kita lihat

$$H'\,(H')^* = (x'^2+y'^2+z'^2)\,\sigma_I$$

$$= H\,H^*$$

yang berarti bahwa transformasi Unitair tidak merubah panjang "vektor" H.

6. Rotasi Kecil

Suatu rotasi pada suatu titik boleh dipandang sebagai urut-urutan rotasi-rotasi kecil pada suatu sumbu, dengan setiap kali sumbu rotasi itu berubah-ubah.
Kita hendak mempelajari bagaimana merumuskan rotasi pada suatu titik. Rotasi kecil sistem koordinat benda S' terhadap kedudukannya semula yang berimpit dengan sistem koordinat ruang S dapat dirumuskan dengan persamaan

$$\begin{aligned} \delta e_1' &= \delta\Omega_{11}\, e_1 + \delta\Omega_{12} e_2 + \delta\Omega_{13} e_3 \\ \delta e_2' &= \delta\Omega_{21}\, e_1 + \delta\Omega_{22} e_2 + \delta\Omega_{23} e_3 \\ \delta e_3' &= \delta\Omega_{31}\, e_1 + \delta\Omega_{32} e_2 + \delta\Omega_{33} e_3 \end{aligned} \qquad (212)$$

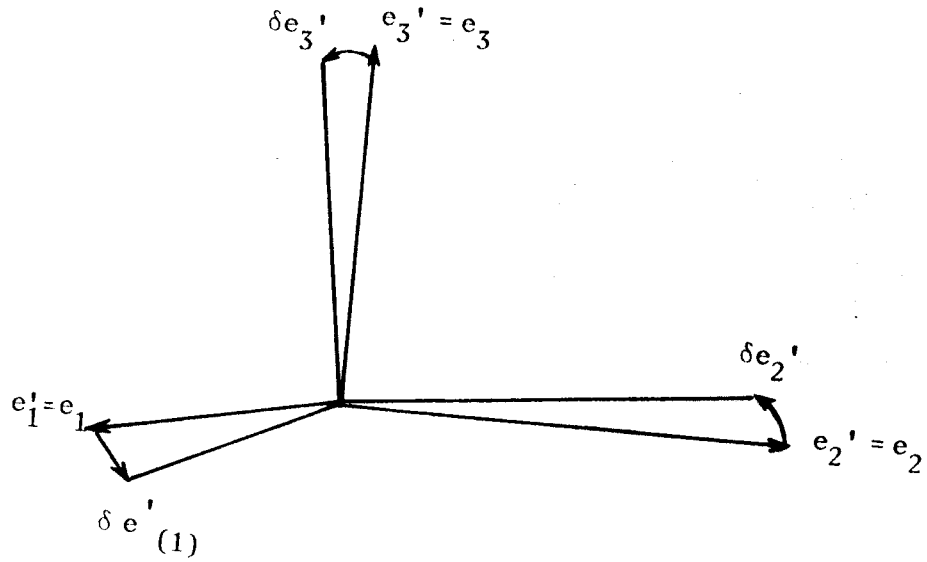
atau dengan notasi matrix

$$\begin{pmatrix} \delta e_1' \\ \delta e_2' \\ \delta e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\Omega_{11} & \delta\Omega_{12} & \delta\Omega_{13} \\ \delta\Omega_{21} & \delta\Omega_{22} & \delta\Omega_{23} \\ \delta\Omega_{31} & \delta\Omega_{32} & \delta\Omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

atau lebih singkat

$$\delta e' = (\delta\Omega)\, e \qquad (213)$$

Untuk jelasnya kita perhatikan gambar IV.4.



Gambar IV.4
Rotasi kecil sistem koordinat benda
terhadap sistem koordinat ruang.

Karena

$$\delta e_1' \perp e_1 \quad \text{dan} \quad \delta e_2' \perp e_2 \quad \text{dan} \quad \delta e_3' \perp e_3$$

maka

$$\delta\Omega_{11} = 0 \quad \text{dan} \quad \delta\Omega_{22} = 0 \quad \text{dan} \quad \delta\Omega_{33} = 0 \qquad (214)$$

Selanjutnya

$$(e_1 + \delta e_1) \perp (e_2 + \delta e_2')$$

maka

$$(e_1 + \delta e_1') \cdot (e_2 + \delta e_2') \neq 0$$

yang dengan mengingat persamaan-persamaan (212) dan (214) serta mengingat pula $e_1 \perp e_2$ sehingga $e_1 . e_2 = 0$ dan seterusnya menghasilkan

$$\delta\Omega_{21} = -\delta\Omega_{12}$$

Seperti itu pula, karena

$$(e_1 + \delta e_1') \perp (e_3 + \delta e_3')$$

$$(e_2 + \delta e_2') \perp (e_3 + \delta e_3')$$

akan kita peroleh

$$\delta\Omega_{31} = -\delta\Omega_{13}$$

$$\delta\Omega_{32} = -\delta\Omega_{23}$$

Dengan demikian, untuk matrix $(\delta\Omega)$, kita dapat menulis misalnya

$$(\delta\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\Omega_3 & -\delta\Omega_2 \\ -\delta\Omega_3 & 0 & \delta\Omega_1 \\ \delta\Omega_2 & -\delta\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (215)$$

Kita perhatikan bahwa matrix $(\delta\Omega)$ sudah tinggal mengandung 3 variabel bebas saja, meskipun tanpa transformasi ke sudut-sudut Euler.
Dengan penulisan demikian, maka

$$\delta e_1' = e_2\delta\Omega_3 - e_3\delta\Omega_2 = \underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_1$$

$$\delta e_2' = -e\delta\Omega_3 + e_3\delta\Omega_1 = \underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_2$$

$$\delta e_3' = e_1\delta\Omega_2 - e_2\delta\Omega_1 = \underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_3$$

$\underset{\sim}{\delta\Omega}$ yang komponen-komponennya ialah $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$ disebut vektor rotasi kecil.
Demikianlah maka untuk rotasi kecil sembarang titik materi yang vektor kedudukannya semula

$$\underset{\sim}{r} = xe_1 + ye_2 + xe_3 = xe_1' + ye_2' + ze_3'$$

dengan mengingat bahwa rotasi itu menyertai rotasi sistemkoordinat S', yang berarti

$$\delta x = 0 \quad \text{dan} \quad \delta y = 0 \quad \text{dan} \quad \delta z = 0$$

kita dapat menulis

$$\delta\underset{\sim}{r} = x\delta e_1' + y\delta e_2' + z\,\delta e_3'$$

$$= x\underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_1 + y\,\underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_2 + z\underset{\sim}{\delta\Omega} \times e_3$$

$$= \underset{\sim}{\delta\Omega} \times (xe_1) + \underset{\sim}{\delta\Omega} \times (ye_2) + \underset{\sim}{\delta\Omega} \times (ze_3)$$

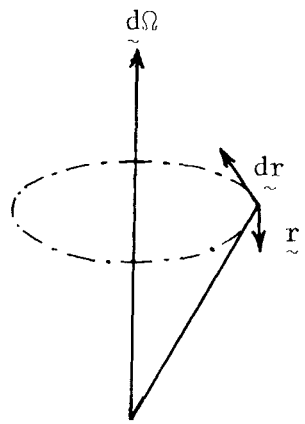
$$= \underset{\sim}{\delta\Omega} \times \underset{\sim}{r}$$

Untuk jelasnya kita perhatikan diagram gambar IV.5.
Jadi untuk suatu rotasi sekeliling suatu sumbu, dengan mendiferensialkan persamaan di atas terhadap waktu t, kita peroleh

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} \qquad (216)$$

dengan

$$\underset{\sim}{\omega} = \frac{d\,\underset{\sim}{\Omega}}{dt}$$



Gambar IV.5.
Diferensial vektor koordinat oleh
rotasi kecil.

suatu vektor yang arahnya pada arah vektor rotasi $d\underset{\sim}{\Omega}$ yang berarti pada arah sumbu putar, serta besarnya sama dengan besar kecepatan sudut ω; vektor itu, yang menyatakan cepatnya rotasi, sewajarnyalah disebut vektor kecepatan sudut, sebagaimana telah terdefinisikan pula di bab II pasal 4 tentang impuls putar sistem materi maupun di Bab I pasal 2.

7. Impuls Putar Benda Tegar dan Tensor Enersia

Di bab II pasal 4, kita telah mendefinisikan impuls putar sistem titik materi. Definisi yang sama sudah tentu berlaku pula untuk benda tegar.
Namun harus diingat bahwa pada penjabaran rumus persamaan (67) di bab II pasal 4 tersebut, kita meninjau gerakan perputaran titik-titik materi pada suatu bidang yang tegak lurus sumbu putar. Dalam hal ini momen enersia I adalah suatu besaran skalar. Marilah kita tinjau keadaan yang lebih umum yakni impuls putar benda tegar, ialah yang menyangkut perputaran setiap bagian dari benda tegar itu, sekeliling sumbu putar yang tetap. Sejalan dengan definisi impuls putar sistem titik-titik materi, impuls putar benda tegar diberikan oleh

$$\underset{\sim}{H} = \int \underset{\sim}{r} \times d(m\underset{\sim}{v})$$
$$= \int \underset{\sim}{r} \times \dot{\underset{\sim}{r}}\, dm$$

yang menurut persamaan (216), lalu menjadi

$$\underset{\sim}{H} = \int \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}\, dm$$
$$= \int \underset{\sim}{r}^2 \underset{\sim}{\omega}\, dm - \int (\underset{\sim}{r}.\underset{\sim}{\omega})\, \underset{\sim}{r}\, dm$$

Dengan menuliskan komponen-komponennya, persamaan ini memberikan

$$H_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$H_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$H_x = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

atau disingkat

$$\underset{\sim}{H} = I\ \underset{\sim}{\omega} \qquad (217)$$

tetapi dalam hal ini, I bukan skalar, melainkan matrix yang elemen-elemennya ialah

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm \qquad (218)$$
$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{xy} = -\int x\, y\, dm \qquad I_{yx} = -\int y\, x\, dm$$
$$I_{xz} = -\int x\, z\, dm \qquad I_{zx} = -\int z\, x\, dm$$
$$I_{yz} = -\int y\, z\, dm \qquad I_{zy} = -\int z\, y\, dm$$

Jelaslah bahwa sebenarnya

$$I_{xy} = I_{yx}$$
$$I_{xz} = I_{zx}$$
$$I_{yz} = I_{zy}$$

yang berarti bahwa matrix I adalah matrix simetri.
Matrix I di atas disebut tensor enersia atau tensor momental dan elemen-elemennya selain I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, disebut enersia silang (product of inertia).

Dari hubungan persamaan (217), secara aljabar vektor, dengan I adalah fungsi koordinat-koordinat x, y, z, matrix I boleh dipandang sebagai matrix transformasi yang mentransformasikan vektor $\underset{\sim}{\omega}$ menjadi vektor $\underset{\sim}{H}$.

Maka pada umumnya $\underset{\sim}{H}$ tidak searah dengan $\underset{\sim}{\omega}$.

Jikalau eigenvector I adalah orthogonal, maka dapat dipilih sistem koordinat benda S' sedemikian rupa hingga I adalah diagonal, dalam bentuk misalnya

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Kita hendak meneliti apakah eigenvector I memang orthogonal. Misalnya eigenvector I ialah

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{R}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{R}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Maka dengan I_x, I_y, dan I_z selaku eigenvaluenya,

$$I\underset{\sim}{R}_1 = I_x R_1 \qquad IR_2 = I_y R_2 \qquad IR_3 = I_z R_3 \tag{219}$$

Eigenvector adalah orthogonal bilamana

$$\underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2 = 0 \qquad \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_3 = 0 \qquad \underset{\sim}{R}_2^{+}\ \underset{\sim}{R}_3 = 0$$

Dari persamaan (219) kita dapatkan

$$\underset{\sim}{R}_1^{+}\ I\underset{\sim}{R}_2 = \underset{\sim}{R}_1^{+}\ I_y \underset{\sim}{R}_2 = I_y \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2$$

$$(IR_1)^{+}\ R_2 = (I_x R_1)^{+}\ R_2$$

$$= \underset{\sim}{R}_1^{+}\ I_x^{*}\ \underset{\sim}{R}_2 = I_x^{*}\ \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2$$

$$= I_x\ \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2$$

Sedangkan

$$(I\underset{\sim}{R}_1)^{+}\ \underset{\sim}{R}_2 = \underset{\sim}{R}_1^{+}\ I^{*}\ \underset{\sim}{R}_2 = \underset{\sim}{R}_1^{+}\ I\underset{\sim}{R}_2 = I_y \underset{\sim}{R}_1^{+} \underset{\sim}{R}_2$$

sebab matrix I adalah simetri dan elemen-elemennya rieel.

Jadi

$$I_x \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2 = I_y\ \underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2$$

Ini hanya mungkin apabila

$$\underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_2 = 0$$

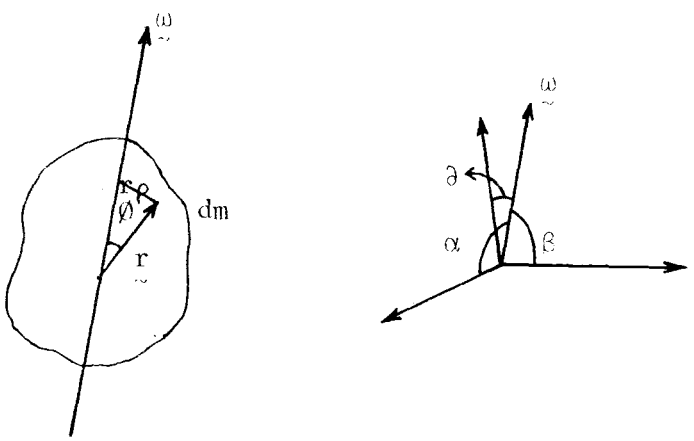
Dengan cara yang sama akan terbukti pula

$$\underset{\sim}{R}_1^{+}\ \underset{\sim}{R}_3 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \underset{\sim}{R}_2^{+}\ \underset{\sim}{R}_3 = 0$$

Sumbu-sumbu koordinat yang dipilih pada arah eigenvector-eigenvector itu disebut sumbu-sumbu utama (principle axes).
Arah sumbu-sumbu utama di dalam benda itu ditentukan oleh bentuk geometri benda tegar serta letak titik pusat sistem koordinatnya.

8. Elipsoida Momental (Elipsoida Inersial)

Pengertian momen inersia telah kita kenal untuk suatu lamina (keping datar) yang berputar pada sumbu yang tegak lurus bidang lamina, ataupun pada sumbu yang berada di bidang lamina. Di lain pihak, di atas kita kenal tensor inersia terhadap suatu titik; momen inersia terhadap sumbu koordinat, yakni I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} adalah di antara elemen-elemen tensor tersebut.
Sekarang hendak kita pelajari momen inersia terhadap sumbu putar ω, yakni misalnya I_{ω}, yang didefinisikan seperti lazimnya untuk lamina.
Kita perhatikan gambar IV.6.



Gambar IV.6.
Momen inersia terhadap pusat koordinat.

Maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= \int \rho^2 \, dm \\ &= \int (r \sin \phi)^2 \, dm \\ &= \int \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{n} \, dm \end{aligned}$$

dengan n sebagai vektor satuan sepanjang $\underset{\sim}{\omega}$.
Akan tetapi

$$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\partial \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\partial \end{vmatrix}$$

$$\cos\alpha = \underset{\sim}{n} \cdot e_1$$
$$\cos\beta = \underset{\sim}{n} \cdot e_2$$
$$\cos\partial = \underset{\sim}{n} \cdot e_3$$

yaitu komponen-komponen $\underset{\sim}{n}$ pada arah sumbu-sumbu e.
Jadi

$$I_\omega = \int \begin{vmatrix} e & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\partial \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\partial \end{vmatrix} dm$$

$$= \int (y^2 + z^2) \cos^2\alpha \; dm$$
$$+ \int (x^2 + z^2) \cos^2\beta \; dm$$
$$+ \int (x^2 + y^2) \cos^2\partial \; dm$$
$$- 2 \int ..... \; dm$$
$$- 2 \int ..... \; dm$$

yakni

$$I_\omega = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\partial + 2 I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2 I_{xz}\cos\alpha\cos\partial + 2 I_{yz}\cos\beta\cos\partial \quad (220)$$

Persamaan ini adalah suatu persamaan elipsoida dengan I_{xx}, I_{xy}. ..... dan seterusnya selaku parameter-parameter dan cos α, cos β, cos ∂ selaku variabel-variabelnya. Elipsoida yang diberikan oleh persamaan tersebut, disebut elipsoida momental atau elipsoida inersial.
Kalau sumbu-sumbu koordinatnya dipilih sepanjang sumbu-sumbu utama, maka

$$I_{xy} = 0 \quad I_{xz} = 0 \quad I_{yz} = 0$$

sehingga persamaan elipsoida menjadi

$$I_\omega = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\partial \quad (221)$$

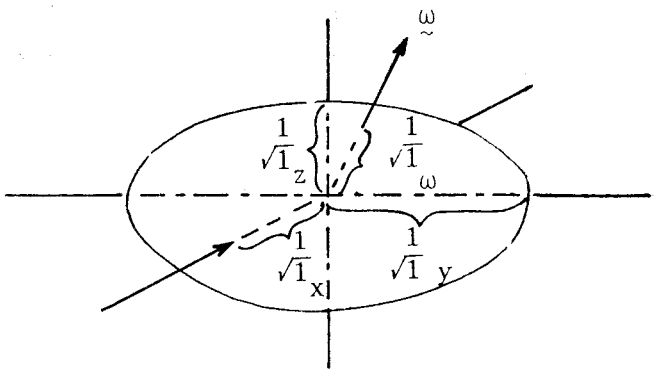
Tetapi ini adalah persamaan elipsoida yang sumbu-sumbu simetrinya adalah sepanjang sumbu-sumbu koordinat.
Jadi sumbu-sumbu simetri elipsoida momental adalah sepanjang sumbu-sumbu utama.
Lebih lanjut persamaan di atas menunjukkan bahwa panjang sumbu - sumbu simetrinya berturut-turut adalah

$$\frac{1}{\sqrt{I_x}} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{I_y}} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{I_z}}$$

Sedangkan jarak titik tembus $\underset{\sim}{\omega}$ dengan permukaan elipsoida dari pusat adalah

$$\frac{1}{\sqrt{I_\omega}}$$

Gambar IV.7 kiranya menjelaskan keterangan di atas.



Gambar IV.7
Alipsoida momental dan komponen-komponen tensor enersia.

9. Tenaga Kinetik Rotasi

Sejalan dengan yang untuk sistem materi, maka tenaga kinetik benda tegar adalah

$$K = \tfrac{1}{2} \int v^2 \, dm$$
$$= \tfrac{1}{2} \int (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}) \cdot (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}) \, dm$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \, dm$$

yang dengan definisi yang diberikan oleh persamaan (218), menjadi

$$K = \tfrac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$
$$+ I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_x + I_{yz} \omega_y \omega_z$$

selanjutnya dengan mengingat

$$\omega_x = \omega \cos \alpha$$
$$\omega_y = \omega \cos \beta$$
$$\omega_z = \omega \cos \partial$$

dan persamaan (220) akhirnya kita peroleh

$$K = \tfrac{1}{2} I_\omega \omega^2 \qquad (222)$$

Hendaknya diingat bahwa tenaga kinetik K dihubungkan dengan ω^2 oleh momen enersia terhadap sumbu putar I_ω , yakni oleh suatu skalar, sedangkan $\underset{\sim}{H}$ dihubungkan dengan $\underset{\sim}{\omega}$ oleh suatu tensor enersia I, yakni oleh suatu matrix, bukan skalar.
Namun demikian, dengan memilih sumbu-sumbu utama selaku sumbu - sumbu koordinat, kita dapat menulis

$$\underset{\sim}{H} = I_x \omega_x e_1 + I_y \omega_y e_2 + I_z \omega_z e_3$$
$$= \tfrac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

yang menghasilkan

$$K = \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{H} . \underset{\sim}{\omega} \qquad (223)$$

yang analoog dengan tenaga kinetik titik materi untuk gerakan translasi

$$K = \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{l} . \underset{\sim}{v}$$

dengan $\underset{\sim}{l}$ ialah impuls $m \underset{\sim}{v}$.
Lebih lanjut, karena H dan K tak tergantung pada sistem koordinat benda maka persamaan (217) dan persamaan (222), berlaku umum.

10. Persamaan Gerak Euler

Analoogi antara gaya dengan impuls gaya, yakni antara

$$\underset{\sim}{F} = \frac{d\underset{\sim}{l}}{dt} \quad \text{dengan} \quad \underset{\sim}{\tau} = \frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}$$

kiranya mudah dimengerti untuk benda tegar yang berbentuk lamina yang berputar pada sumbu yang tegak lurus bidang lamina.
Akan tetapi kita telah mendefinisikan impuls putar H secara umum yakni terhadap suatu titik sehingga pada umumnya $\underset{\sim}{H}$ tidak sejajar $\underset{\sim}{\omega}$.

Kita hendak meneliti hubungan antara impuls gaya $\underset{\sim}{\tau}$ dengan momen enersia I melalui hubungannya dengan impuls putar H.
Sebelumnya perlu diingat bahwa dalam penjabaran persamaan (217), $\underset{\sim}{H} = I\,\underset{\sim}{\omega}$, tensor enersia adalah fungsi tetap dari koordinat-koordinat bagian-bagian benda, di dalam sistem koordinat S' yang berputar bersama benda. Jadi I berharga tetap terhadap waktu. Namun demikian persamaan (70) dan persamaan (217) tidak berarti

$$\underset{\sim}{\tau} = I\,\dot{\underset{\sim}{\omega}}$$

melainkan

$$\underset{\sim}{\tau} = I\,\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \dot{I}\,\underset{\sim}{\omega}$$

Akan tetapi tidaklah mudah menyatakan $\dot{I}$ dari I. Maka Euler menerapkan persamaan (70) untuk benda tegar dengan meninjau diferensial H.
Seperti pada pembicaraan hal rotasi kecil, kita tinjau perubahan $\underset{\sim}{H}$ terhadap waktu yakni $\dot{\underset{\sim}{H}}$ di dalam sistem koordinat ruang S dengan mana sistem koordinat benda S' mula-mula berimpit.
Maka dengan mengingat keadaan mula-mula

$$\underset{\sim}{H} = H_x e_1 + H_y e_2 + H_z e_3 = H_x e_1 + H_y e_2' + H_z e_3'$$

perubahan H terhadap waktu diberikan oleh

$$\dot{\underset{\sim}{H}} = (\dot{H}_x e_1' + \dot{H}_y e_2' + H_z e_3') + (H_x \dot{e}_1' + H_y \dot{e}_2' + H_z \dot{e}_3')$$

Suku kedua ruas kanan adalah berhubungan dengan perubahan $\underset{\sim}{H}$ karena terbawa rotasi benda. Tetapi pada keadaan mula-mula e' ≡ e ; maka

$$\dot{\underset{\sim}{H}} = (\dot{H}_x e_1 + \dot{H}_y e_2 + \dot{H}_z e_3) + (H_x \dot{e}_1' + H_y \dot{e}_2' + H_z \dot{e}_3')$$

Selanjutnya dari persamaan (213), dan persamaan (215) kita dapatkan

$$\dot{e}_1' = \underset{\sim}{\omega} \times e_1$$

$$\dot{e}_2' = \underset{\sim}{\omega} \times e_2$$

$$\dot{e}_3 = \underset{\sim}{\omega} \times e_3$$

sehingga kemudian kita tuliskan

$$\dot{\underset{\sim}{H}} = (\dot{H}_x e_1 + \dot{H}_y e_2 + \dot{H}_z e_3) + \underset{\sim}{\omega} \times (H_x e_1 + H_y e_2 + H_z e_3)$$

$$= \dot{H}_x e_1 + \dot{H}_y e_2 + \dot{H}_z e_3 + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{H}$$

Lebih lanjut, karena $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ dan $\dot{H}_z$ adalah perubahan H_x, H_y dan H_z terhadap waktu pada saat mula-mula, pada saat mana e' ≡ e (S' berimpit dengan S) maka untuk saat itu, di dalam sistem koordinat ruang S berlaku

$$\dot{\underset{\sim}{H}} = I\,\dot{\omega}$$

yakni

$$\dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z$$

$$\dot{H}_y = I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z$$

$$\dot{H}_z = I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z$$

sehingga akhirnya dengan mengingat persamaan (217) dari persamaan (70)

$$\underset{\sim}{\tau} = \frac{d\underset{\sim}{H}}{dt} = \dot{\underset{\sim}{H}}$$

kita peroleh apa yang disebut persamaan gerak Euler di dalam sistem koordinat ruang

$$\tau_x = \dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_y(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) - \omega_2(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)$$

$$\tau_y = \dot{H}_y = I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + \ldots\ldots\ldots$$

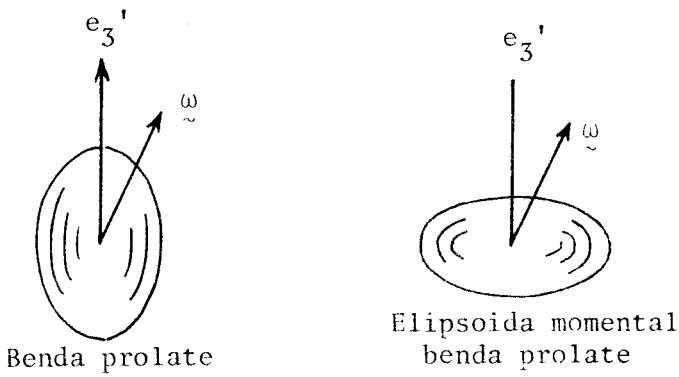
$$\tau_z = \dot{H}_z = I_{zx}\dot{\omega}_x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

yang apabila untuk sumbu-sumbu koordinat benda e_1', e_2', e_3' diambil yang berimpit dengan sumbu-sumbu utama benda, menjadi

$$\begin{aligned}\tau_x &= I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_z\,\omega_y\\ \tau_y &= I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_x\,\omega_z\\ \tau_z &= I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_y\,\omega_x\end{aligned} \qquad (224)$$

Penerapan khusus persamaan Euler (224) ini misalnya suatu masalah yang diselidiki oleh Poinsot (Poinsot problem) pada tahun 1834, ialah tentang gerakan perputaran bebas (tiada impuls gaya) benda tegar berbentuk spheroida yang berputar pada sumbu yang tidak berimpit dengan sumbu simetri benda (sumbu utama benda). Kalau elipsoida mempunyai 3 sumbu simetri, maka spheroida hanya mempunyai 2 sumbu simetri.

Dengan demikian maka elipsoida momental spheroida juga akan berbentuk spheroida dengan 2 sumbu utama yang sama panjang, dan momen enersianya terhadap sumbu-sumbu utama dapat dituliskan sebagai $I_x = I_y = I$ dan I_z bilamana untuk e_3' diambil yang berimpit dengan sumbu simetri benda.
Oleh karena panjang sumbu elipsoida momental berbanding terbalik dengan akar momen enersia, sedangkan momen enersia berbanding lurus dengan kwadrat koordinat, maka benda yang berbentuk prolate, yaitu yang sumbu ketiganya lebih panjang daripada sumbu lain yang sama, elipsoida momentalnya akan berbentuk oblate yakni yang sumbu ketiganya lebih pendek daripada dua sumbu lainnya yang sama.
Gambar IV.8 menjelaskan keterangan tersebut.
Sebaliknya untuk benda berbentuk oblate, elipsoida momentalnya berbentuk prolate.
Suatu contoh yang baik dari masalah Poinsot ialah gerakan rotasi bumi.



Gambar IV.8.
Oblate elipsoida momental benda prolate.

Kenyataannya sumbu rotasi bumi yang berbentuk oblate itu tidak tepat berimpit dengan sumbu simetri bumi.
Akibatnya, sumbu rotasi bumi berpresesi sekitar (berputar mengelilingi) sumbu simetri bumi dengan periode kira-kira 430 hari. Hal ini dapat diterangkan sebagai berikut.
Dari persamaan Euler (224) dengan memasukkan $\tau = 0$, kita dapat menulis

$$0 = I\dot{\omega}_x + (I_z - I)\,\omega_y\omega_z \qquad (225a)$$

$$0 = I\dot{\omega}_y + (I - I_z)\,\omega_x\omega_z \qquad (225b)$$

$$0 = I\dot{\omega}_z \qquad (225c)$$

Dari persamaan (225^a) kita dapat menarik kesimpulan bahwa ω_z adalah tetap.
Dari persamaan (225^a) dan persamaan (225^b) kita peroleh

$$\dot{\omega}_x = \frac{I - I_z}{I} \omega_y \omega_z$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{I_z - I}{I} \omega_x \omega_z$$

yang lalu menghasilkan

$$\ddot{\omega}_x = k^2 \omega_x \quad \text{dan} \quad \ddot{\omega}_y = - k^2 \omega_y$$

dengan

$$k = \frac{I - I_z}{I} \omega_z$$

Suatu penyelesaian misalnya yang diberikan oleh

$$\omega_x = A \sin kt$$

yang lalu memberikan

$$\dot{\omega}_x = kA \cos kt$$

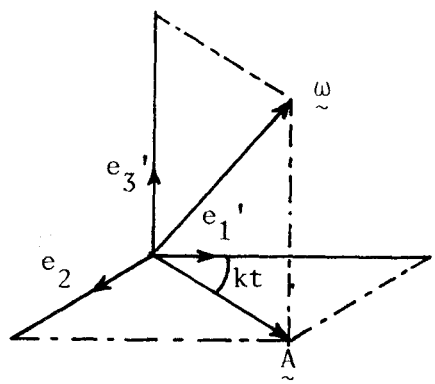
Tetapi menurut persamaan di atas

$$\dot{\omega}_x = k \omega_y$$

Jadi

$$\omega_y = A \cos kt$$

Dari gambar IV.9 jelaslah bahwa ω_x dan ω_y adalah proyeksi $\underset{\sim}{A}$ pada sumbu-sumbu e_1^1 dan e_2^1, dengan $\underset{\sim}{A}$ berputar mengelilingi e_3^1 dengan kecepatan sudut k.



Gambar IV.9
Rotasi sumbu putar sekeliling sumbu simetri benda.

adalah proyeksi $\underset{\sim}{A}$ pada sumbu-sumbu e_1' dan e_2', dengan $\underset{\sim}{A}$ berputar mengelilingi e_3' dengan kecepatan sudut k.
Tetapi

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega_x e_1' + \omega_y e_2' + \omega e_3'$$

$$= \underset{\sim}{A} + \omega_z e_3'$$

Oleh karena ω_z tetap dan $\underset{\sim}{A}$ berputar, maka $\underset{\sim}{\omega}$ berputar mengelilingi e_3' dengan periode

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Periode ini ialah periode dari apa yang disebut presesi.
Selanjutnya, karena $\tau = 0$, maka pastilah $\underset{\sim}{H}$ tetap diam di dalam sistem koordinat ruang S. (Ingat $\underset{\sim}{H}$ berputar di dalam sistem koordinat benda S').

Jadi perputaran benda tentu sedemikian rupa hingga ω dan $\underset{\sim}{H}$ di dalam benda berputar mengelilingi sumbu simteri e_3' ; tetapi di lain pihak, dilihat dari luar benda, H tetap tinggal diam.
Jadi dengan sendirinya dilihat dari luar benda, e_3' sudah tentu berputar mengelilingi $\underset{\sim}{H}$.

Lebih lanjut, dari persamaan (217)

$$\underset{\sim}{H} = I \underset{\sim}{\omega}$$

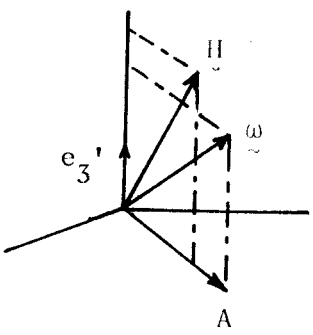
kita dapatkan

$$\underset{\sim}{H} = I\omega_x e_1' + I\omega_y e_2' + I_z \omega_z e_3'$$

$$= I(\omega_x e_1' + \omega_y e_2') + I_z \omega_z e_3'$$

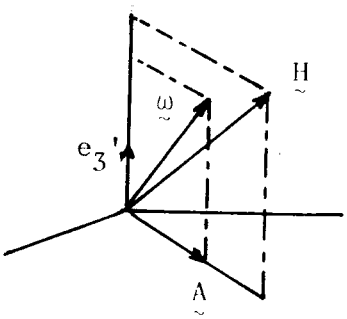
$$= I \underset{\sim}{A} + I_z \omega_z e_3'$$

Yang berarti H sebidang dengan A dan e_3'.
Gambar IV.10 melukiskan apa yang sebenarnya terjadi.



$$\frac{H_z}{\omega_z} > \frac{H_x}{\omega_x} = \frac{H_y}{\omega_y}$$

berarti $I_z > I$



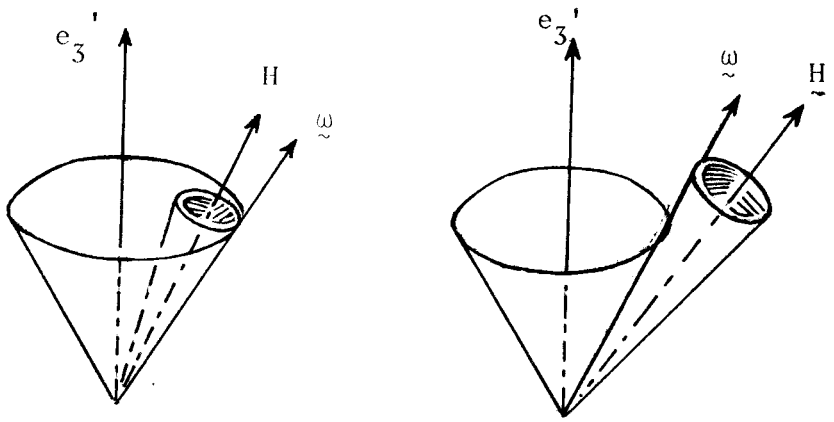
$$\frac{H_z}{\omega_z} < \frac{H_x}{\omega_x} = \frac{H_y}{\omega_y}$$

berarti $I_z < I$

Gambar IV.10
Vektor impuls putar dan vektor sumbu putar benda spheroidal

Untuk benda yang berbentuk oblate, $I_z < I$ sehingga H ada di sebelah luar terhadap e_3' dan yang prolate adalah sebaliknya.

Perputaran e_3' dan ω sekeliling H sebagaimana terlihat dari luar benda, dapat dilukiskan dengan menggulingnya apa yang disebut kerucut benda (body cone) pada dinding apa yang disebut kerucut ruang (space cone) seperti yang terlihat di gambar IV.11.



Gambar IV.11
Kerucut ruang dan kerucut benda dalam masalah Poinsot.

Garis sepanjang H adalah tetap tinggal diam dan disebut garis tetap (invariable line), sedangkan bidang yang tegak lurus ini, juga tetap dan disebut bidang tetap (invariable plane).

11. Persamaan Euler dengan Sudut-sudut Euler

Persamaan Euler dengan sudut-sudut Euler selaku variabel-variabel dapat diperoleh dengan pertolongan persamaan Lagrange, yakni dengan menyatakan impuls gaya umum (generalized force) Q_j menurut persamaan (135)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

Dalam hal ini koordinat umum q_j ialah sudut-sudut Euler φ, Θ, dan Ψ, sehingga kecepatan umum $\dot{q}_j$ ialah kecepatan-kecepatan sudut $\dot{\varphi}$, $\dot{\Theta}$, dan $\dot{\Psi}$.
Maka langkah pertama ialah menyatakan ω_x, ω_y, dan ω_z dalam hubungannya dengan $\dot{\varphi}$, $\dot{\Theta}$ dan $\dot{\Psi}$.

Untuk itu kita tinjau langkah-langkah rotasi sistem koordinat seperti yang dijelaskan dengan gambar IV.2.
Pada langkah transformasi pertama, $\dot{\underset{\sim}{\varphi}}$ adalah pada arah e_3', sehingga

$$\dot{\underset{\sim}{\varphi}} = \dot{\varphi}\, e_3'^{(1)} \qquad (226^a)$$

Demikianlah pula untuk langkah-langkah transformasi kedua dan ketiga berlaku

$$\dot{\underset{\sim}{\Theta}} = \dot{\Theta}\, e_1'^{(2)} \qquad (226^b)$$

$$\dot{\underset{\sim}{\Psi}} = \dot{\Psi}\, e_3'^{(3)} \qquad (226^c)$$

Adapun ω_x tak lain ialah jumlah komponen vektor-vektor $\dot{\underset{\sim}{\varphi}}$, $\dot{\underset{\sim}{\Theta}}$ dan $\dot{\underset{\sim}{\Psi}}$ pada arah sumbu X terakhir, yaitu pada arah $e_1'^{(3)}$, dan ω_y ialah yang pada arah $e_2'^{(3)}$, dan ω_z ialah yang pada arah $e_3'^{(3)}$; jadi

$$\omega_x = \dot{\underset{\sim}{\varphi}} . e_1'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Theta}} . e_1'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Psi}} . e_1'^{(3)}$$

$$\omega_y = \dot{\underset{\sim}{\varphi}} . e_2'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Theta}} . e_2'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Psi}} . e_2'^{(3)}$$

$$\omega_z = \dot{\underset{\sim}{\varphi}} . e_3'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Theta}} . e_3'^{(3)} + \dot{\underset{\sim}{\Psi}} . e_3'^{(3)}$$

yang dengan mengingat hubungan dalam persamaan (226) di atas, serta mengingat persamaan langkah-langkah transformasi di pasal 4 di atas, yakni

$$e_1'^{(1)} = \cos\varphi . e_1' + \sin\varphi . e_2'$$

$$e_2'^{(1)} = -\sin\varphi . e_1' + \cos\varphi . e_2'$$

$$e_3'^{(1)} = e_3 .$$

$$e_1'^{(2)} = e_1'^{(1)}$$

$$e_2'^{(2)} = \cos\Theta . e_2'^{(1)} + \sin\Theta . e_3'^{(1)}$$

$$e_3'^{(2)} = -\sin\Theta . e_2'^{(1)} + \cos\Theta . e_3'^{(1)}$$

$$e_1'^{(3)} = \cos\Psi . e_1'^{(2)} + \sin\Psi . e_2'^{(2)}$$

$$e_2'^{(3)} = -\sin\Psi . e_1'^{(2)} + \cos\Psi . e_2'^{(2)}$$

$$e_3'^{(3)} = e_3'^{(2)}$$

menjadi

$$\omega_x = \dot{\varphi}\, e_3'^{(1)}.e_1'^{(3)} + \dot{\Theta}\, e_1'^{(2)}.\, e_1'^{(3)} + \dot{\Psi}\, e_3'^{(3)}.e_1'^{(3)}$$

$$= \dot{\varphi}\, e_3'^{(1)}.(\cos\Psi.e_1'^{(2)} + \sin\Psi.e_2'^{(2)})$$

$$+ \dot{\Theta}\, e_1'^{(2)}.(\cos\Psi.e_1'^{(2)} + \sin\Psi.e_2'^{(2)}$$

$$+ \dot{\Psi} e_3'^{(3)}.e_1'^{(3)}$$

$$= \dot{\varphi}\, e_3'^{(1)}.\{\cos\Psi.e_1'^{(1)} + \sin\Psi(\cos\Theta.e_2'^{(1)} + \sin\Theta.e_3'^{(1)}\}$$

$$+ \dot{\Theta}\cos\Psi$$

$$+ 0$$

$$= \dot{\varphi}\sin\Psi\sin\Theta + \dot{\Theta}\cos\Psi$$

dan dengan jalan seperti itu akan kita dapat

$$\omega_y = \dot{\varphi}\cos\Psi\sin\Theta - \dot{\Theta}\sin\Psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\Theta + \dot{\Psi}$$

dan kemudian untuk suatu spheroida kita peroleh

$$K = \tfrac{1}{2} I\,\omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_z\,\omega_z^2$$

$$= \tfrac{1}{2} I\,(\dot{\varphi}^2\sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_z(\dot{\varphi}^2\cos^2\Theta + \dot{\Psi}^2 + 2\,\dot{\varphi}\cos\Theta.\,\dot{\Psi}) \qquad (227)$$

Dari hasil ini kita peroleh

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{\Theta}} = I\dot{\Theta}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}\sin^2\Theta + I_z\dot{\varphi}\cos^2\Theta + I_z\dot{\Psi}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{\Psi}} = I_z\dot{\Psi} + I_z\dot{\varphi}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\Theta} = I\dot{\varphi}^2\sin\Theta\cos\Theta - I_z\dot{\varphi}^2\cos\Theta\sin\Theta - I_z\dot{\varphi}\dot{\Psi}\sin\Theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial\Psi} = 0$$

Akhirnya persamaan Lagrange (135) memberikan

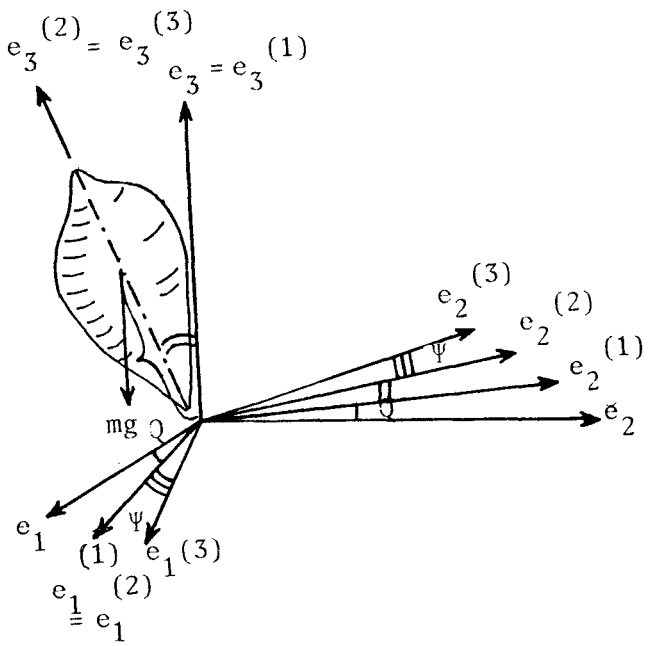
$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) - (I\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_z\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta - I_z\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) = \tau_\theta$$

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_z\dot{\varphi}\cos^2\theta + I_z\dot{\psi}\cos\theta) = \tau_\varphi \qquad (228)$$

$$\frac{d}{dt}(I_z\dot{\psi} + I_z\dot{\varphi}\cos\theta) = \tau_\psi$$

12. Gerakan Pusingan

Suatu contoh khas dari penerapan hasil pembahasan di pasal 11 di atas ialah penelitian gerakan suatu pusingan (gangsingan, giroskop) yang hendak kita bahas di pasal 12 ini.
Kita perhatikan gambar IV.12.



Gambar IV.12.
Sudut-sudut Euler dalam gerakan pusingan.

Gaya luar yang bekerja pada pusingan, kecuali gaya normal di 0, adalah gaya berat mg.
Jadi dalam hal ini

$$\tau_\theta = mgl\sin\theta$$
$$\tau_\varphi = 0$$
$$\tau_\psi = 0$$

Dari kedua hubungan yang akhir ini kita lihat

$$\frac{dH_\varphi}{dt} = \tau_Q = 0$$

$$\frac{dH_\psi}{dt} = \tau_\psi = 0$$

yang berarti

$$H_\varphi = \text{tetap} = \hat{H}_\varphi \text{ misalnya}$$

$$H_\psi = \text{tetap} = \hat{H}_\psi \text{ misalnya}$$

Tetapi, karena

$$V_\varphi = -\int \tau_\varphi d_\varphi = 0 \text{ dan } V_\psi = -\int \tau_\psi d_\psi = 0$$

maka

$$H_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$H_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}$$

Dengan demikian, persamaan (228) menghasilkan

$$I\ddot{\theta} - I\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta = mgl\sin\theta \quad (229)$$

$$I\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_z\dot{\varphi}\cos^2\theta + I_z\dot{\psi}\cos\theta = \hat{H}_\varphi \quad (230)$$

$$I_z\dot{\psi} + I_z\dot{\varphi}\cos\theta = \hat{H}_\psi \quad (231)$$

Pada dasarnya dari ketiga persamaan simultan ini dapat diperoleh θ, φ, dan Ψ sebagai fungsi waktu t. Namun karena rumitnya dan kurang kegunaannya, tak ada orang yang suka mencoba menyelesaiakannya.

Penyelesaian yang kita perlukan hanyalah yang berhubungan dengan gejala fisis yang teramati saja, misalnya yang menerangkan bergoyang-goyangnya atau nutasi (nutation) dan berputar kelilingnya atau presesi (precession) sumbu simetri pusingan.

Suatu hal yang kita mengerti ialah bahwa tenaga total E adalah tetap apabila desipasi panas oleh gesekan diabaikan. Tenaga total E ini terdiri atas tenaga kinetik putaran K dan tenaga potensial gaya berat V = mgl cos θ. Ini berarti bahwa variasi θ terhadap t yang berarti variasi V terhadap t, akan harus dikompensasi variasi K terhadap t; yakni sewaktu V naik, K harus turun dan sebaliknya.

Variasi θ terhadap t ini ialah apa yang kita lihat sebagai bergoyang-goyangnya sumbu simetri, sedangkan berputar kelilingnya sumbu simetri ternyatakan oleh variasi φ terhadap t.

Adapun Ψ adalah pada arah $e_1'^{(3)}$, sehingga $\underset{\sim}{\Psi}$ tak lain ialah kecepatan rotasi (spin) pada sumbu simetri.
Lebih mudah hendak kita teliti lebih dahulu berputar kelilingnya pusingan.
Dari persamaan (230) dan persamaan (231), dapat kita tulis

$$\dot{\varphi} = \frac{\hat{H}_\varphi - H_\psi \cos\theta}{I \sin^2\theta} \tag{232}$$

yang berarti kecepatan presesinya tergantung pada θ; apabila θ bervariasi terhadap waktu t, yang berarti terjadi nutasi, maka kecepatan presesinya juga bervariasi terhadap waktu. Sebagaimana diutarakan di atas, variasi θ terhadap t adalah berhubungan dengan pertukaran antara tenaga potensial dan tenaga kinetik.
Dari persamaan (227) serta mengingat $V = mgl \cos\theta$, kita peroleh tenaga total

$$E = K + V$$
$$= \tfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{2} I_z \omega_z^2 + mgl \cos\theta \tag{233}$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (233) ini ialah tenaga kinetik yang bersangkutan dengan rebah jatuhnya pusingan, sedangkan suku kedua ruas kanan, berhubungan dengan seolah-olah adanya gaya sentripetal yang mengakibatkan presesi; suku ketiga tak lain adalah tenaga kinetik rotasi (spin) pada sumbu simetri.

Selanjutnya dengan persamaan (232) untuk mengeliminasi φ, dan persamaan $\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\Psi}$ yang telah kita peroleh di atas untuk menyatakan ω_z, serta persamaan (231) untuk mengeliminasi Ψ, persamaan (233) di atas akan ternyatakan sebagai

$$E = \tfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} I \left(\frac{\hat{H}_\varphi - \hat{H}_\psi \cos\theta}{I \sin^2\theta} \right)^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{2} \frac{\hat{H}_\psi^2}{I_z} + mgl \cos\theta \tag{234}$$

yang sepenuhnya menyatakan $\dot{\theta}$ sebagai fungsi θ saja.
Untuk singkatnya, kita tulis

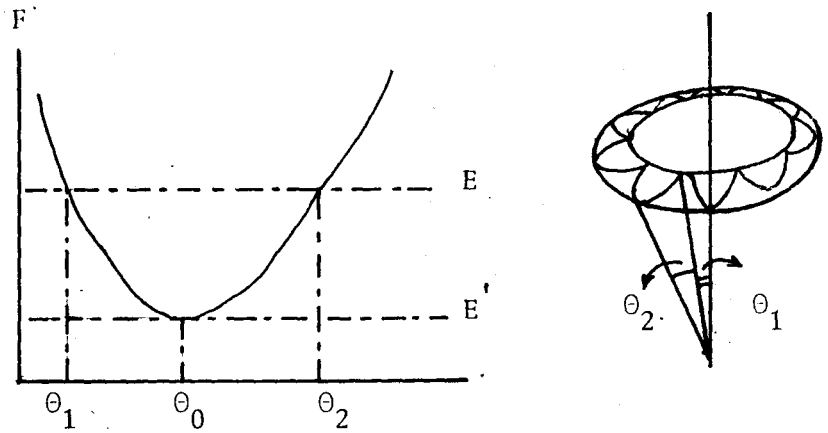
$$E = \tfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + F(\theta)$$

yang lalu memberikan

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I}(E - F)}$$

Sebagaimana F tergantung pada θ maka begitu pula halnya dengan $\dot{\theta}$.
Harga $\dot{\theta}$ akan maximum apabila harga θ adalah sedemikian rupa sehingga F berharga minimum.

Grafik gambar IV.13 kurang lebih melukiskan variasi F terhadap θ.



Gambar IV.13.
Diagram nutasi pusingan.

$\theta = \theta_o$ pada gambar IV.13 adalah harga θ yang memberikan F minimum. Pada harga θ yang sedemikian rupa hingga F = E, kecepatan $\dot{\theta} = 0$; dan ini terjadi pada 2 harga θ, yakni θ_1 dan θ_2 misalnya.

Jadi sumbu simetri itu bergoyang-goyang antara kedua batas harga θ tersebut secara periodik sambil berpresesi sekeliling sumbu vertikal.

Apabila tenaga totalnya kebetulan sama dengan F minimum, yakni E' pada gambar IV.13, θ_1 dan θ_2 berimpit bersama dengan θ_o yang berarti tidak terjadi nutasi.

Kecepatan presesi mantap (steady precession) dalam keadaan ini, sudah tentu diberikan oleh persamaan (232) dengan menuliskan θ_o untuk θ.

Pada keadaan umumnya, cepat rotasi $\dot{\psi}$ adalah besar sekali, sehingga persamaan (229) menjadi

$$I_z \dot{Q} \dot{\psi} \sin\theta \simeq mgl \sin\theta$$

yang memberikan kecepatan presesi

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{I_z \dot{\psi}}$$

Kecuali itu cepat rotasi yang besar menyebabkan persamaan (231) menjadi

$$I_z \dot{\psi} \simeq \hat{H}_\psi \qquad (236)$$

yang berarti vektor impuls putar rotasi boleh dikatakan berimpit dengan sumbu simetri.

DAFTAR PUSTAKA

1. S.W.Mc Cuskey, "An Introduction to Advanced Dynamics", Addison-Wesley, 1959.
2. H.Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, 1959.
3. J.L.Synge & B.A.Griffith, "Principles of Mechanics", Mc Graw Hill, 1959
4. W.D.Mac Millan, "Statics and the Dynamics of a Particle, Mc Graw Hill, 1927.
5. W.D.Mac Millan, "Dynamics of Rigid body", Mc Graw Hill, 1936.
6. H.C.Corben & Philip Stehle, "Classical Mechanics", John Wiley & Sons, 1960.
7. R.A.Becker, "An Introduction to Theoretical Mechanics", Mc Graw Hill, 1954.
8. A.Sommerfeld & M.O.Stern, "Mechanics", Academic Press Inc., 1961.

INDEX

Action, azas - terkecil, 91,92
variabel - ,94, 95
Aphelion, 19, 24, 27, 28
Apses, 19
Back scaterring, 51
Bandul Foucolt, 10
Benda tegar, mekanika -, 113
Bernoulli, Johan -, 55, 58
Body cone, 145
Cayley-Klein, parameter -, 124, 126
D'Alembert, azas -, 57-61, 69
Determinan Jacobi, 100
Differential cross section, 43
Eksentrisitas, 22, 25, 41
Elipsoida, 137, 138, 141
- enersial, 136, 137, 142
Enersia silang, 134
Escape velocity, 26
Euler, teorema -, 118, 119, 121
sudut -, 124, 126, 145, 148
persamaan -, 139, 141, 142, 145
Fungsi generasi, 83, 84, 86, 89, 97, 100, 104, 105
Fungsi karakteristik, 89
Fungsi transformasi, 86, 114
Gangsingan, 148
Gaya, - Coulomb, 40
- dalam, 32, 40, 56, 57, 59
- elastis, 20
- gravitasi, 20
- koriolis, 7, 9
- luar, 30, 31
- sentrifugal, 9
- sentripetal, 7, 9
- umum, 60, 145
Generalized force, 60, 145
Generating function, 83
Giroskop, 148
Gradien potensial, 4
Gravitasi, gaya - , 20
hukum Newton - , 26
percepatan - , 20, 26
tetapan - , 26
Hamburan, 40, 43
rumus - Rutherford, 46
sudut - , 41, 46, 50
Hamilton, azas -, 67, 69, 70, 91, 93
azas variasi - 78, 82
fungsi - , 73, 74, 86, 88, 89, 92
persamaan - , 71, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 82, 87, 88
Hamilton-Jacobi, persamaan - , 80, 88, 90, 95
Holonomic constraint, 64
Holonomik, 61
kaitan -, 64, 66, 67
Hukum kekekalan impuls, 30, 31, 48
Hukum kekekalan tenaga mekanik, 3, 4, 17, 28, 25, 38, 92
Hukum Newton, 30, 31
Impact parameter, 42
Impuls gaya, 140
Impuls putar, 16, 17, 32, 33, 35, 36, 42, 104, 133, 140, 151
Impuls umum, 71-74, 80, 94-96
Jacobi, determinan -, 100, 102
Kanonik, hubungan -, 73
transformasi -, 80, 81, 99
Kecepatan, - hilang, 26
- relatif, 38
- sudut, 7, 8, 33, 133
rumus - 6, 7.
- transport, 8
- umum, 68, 71
Keppler, hukum - , 20, 26, 27
Kerucut benda, 145
Kerucut ruang, 145
Koefisien restitusi, 39
Koordinat, - siklik, 76
transformasi -, 81
- umum, 68, 71, 72, 73, 80, 96, 145
Koplanar, gerakan -, 16
koriolis, gaya -, 7
efek -, 11
koreksi -, 9, 12, 13
Kurung Lagrange, 102, 103
Kurung Poison, 103, 109
Lagrange, - bracket, 102
fungsi -, 63, 67, 71, 72, 74, 91
kurung - , 102, 103
- multiplier, 65
persamaan -, 59, 61, 66, 67, 70, 71, 73, 93, 148
Least action principle, 91
Lioville, teorema - , 109
Massa tereduksi, 53, 54
Matrix Pauli, 128
Matrix transformasi, 115, 134
Medan gaya konservatif, 4
Momen enersia, 33, 67, 136, 139, 140
Momen gaya, 34- 36

Newton, hukum -, 7, 9
Nutasi, 150, 151
Oblate, 142, 145
Osilator harmonik, 86-89, 98
Parameter benturan, 42, 43
Parameter Cayley-Klein, 124, 126
Pauli, matrix -, 128
Percepatan, - koriolis, 8
rumus - , 6, 7
- transport, 8
Perihelion, 19, 24, 27, 28
Persamaan, - Euler, 139, 141
- Lagrange, 148
Poincare, 98, 99, 102
Poinsot, - problem, 141
Poison, kurung -, 103
Presesi, kecepatan -, 150
periode - , 144
- pusingan, 149
- sumbu rotasi bumi, 142
Principle axes, 136
Product of inertia, 134
Prolate, 142, 145
Pusingan, gerakan - , 148
Rigid body, 113
Rotasi, - kecil, 104, 130
vektor - , 132
Routh, cara - , 76
fungsi -, 76, 77
Ruang, - fase, 71, 80, 81, 82, 87, 88, 91, 94, 95, 99, 100, 102, 109
- konfigurasi, 68, 71
- spin, 124, 126, 128
Rutherford, rumus - , 46
Semilatus rectum, 21, 25
Sentrifugal, gaya -, 7
koreksi -, 9
Sentripetal, gaya - , 7, 9
Sistem koordinat, - benda, 113, 114, 130, 139, 168
- berputar, 5, 7
- laboratorium, 47, 50, 51
- polar, 5, 59, 74
- ruang, 113, 114, 118, 130 , 141
- titik berat, 50, 51
- umum, 61
Sistem mekanis, 55, 57, 69, 91
Space cone, 145
Spheroida, 141, 142, 147
Spinor, ruang - , 124, 126, 128
Sudut fase, 98
Sumbu rotasi bumi, 142
Sumbu utama, 136, 139
Tampang lintang diferensial 43,51
Tenaga kinetik, 3, 17, 31, 32, 34, 37, 62, 63, 74
- osilator harmonik, 63
- rotasi, 138, 139
- sistem, 61, 70, 72
Tenaga potensial, 4, 17, 63, 69, 73
- osilator harmonik, 63, 86
Tensor enersia, 133, 134, 136, 139
Tensor momental, 134
Teorema Euler, 118, 119, 121
Titik berat, 29, 37, 48, 57
Titik materi, 3
Transformasi, fungsi -, 114
- kanonik, 81, 89
- koordinat, 81
matrix - ,115
- orthogonal, 113, 115, 118, 1
Tumbukan, 36, 37, 38
- elastis, 38, 40
- non elastis, 38, 40
Usaha, 3, 69
- semu, 55-59
Variabel action, 94, 95
Variabel sudut, 94, 96
Vektor impuls putar, 151

Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1993 / 1994